

I Norme d'un vecteur

Définition : Soit A et B deux points. La norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est définie par $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme de $\vec{u}$ est alors définie par $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriétés :

- Si $\vec{u}(x; y)$ dans un repère orthonormé alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Pour tout réel k, on a $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Exemple : A(-1 ; 2) et B(0 ; 3) alors $\|-2\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{AB}(0 + 1; 3 - 2)$ donc $\overrightarrow{AB}(1; 1)$ et $-2\overrightarrow{AB}(-2; -2)$ et donc $\|-2\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

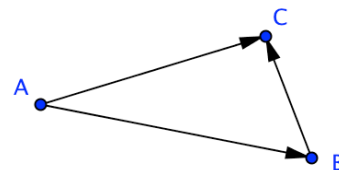
II Définition du produit scalaire

Définition :

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- On écrit : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ le carré scalaire

Remarques :

- Si A, B et C sont trois points du plan, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2)$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre réel.



Propriétés :

- Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dem : $\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2) = 0$$

III Produit scalaire et coordonnées

Dans cette partie, toutes les coordonnées sont données dans un repère orthonormé du plan.

Propriété : Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Dem :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' \text{ car } \vec{u} + \vec{v} (x + x', y + y')$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = xx' + yy'$$

IV Autres expressions du produit scalaire

Propriété : Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Dem voir Activité p 215

Remarque : Cette formule permet de déterminer un angle avec le produit scalaire

V Cas particuliers

Définition : Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs **non nuls**

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et sont de sens opposés si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dem : en utilisant $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens : $\vec{u} = k \vec{v}$, avec $k > 0$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{0}$ si et seulement si $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire : $\vec{u} = k \vec{v}$, avec $k < 0$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ si et seulement si $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{2}$ si et seulement si $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ car $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls)

Propriété : Les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

Remarques :

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

VI Propriété algébrique :

Propriétés :

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- 3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- 4) $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)\vec{u} \cdot \vec{v}$
- 5) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$6) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$7) (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstrations : les 4 premières démonstrations utilisent l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé, les 3 dernières utilisent les 2 propriétés de distributivité et la propriété de commutativité.

Dem

1) Avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ La somme des vecteurs est commutative et la somme des nombres également donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ et $\vec{w}(x'', y'')$

$$\vec{v} + \vec{w}: (x' + x'', y' + y'')$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$$

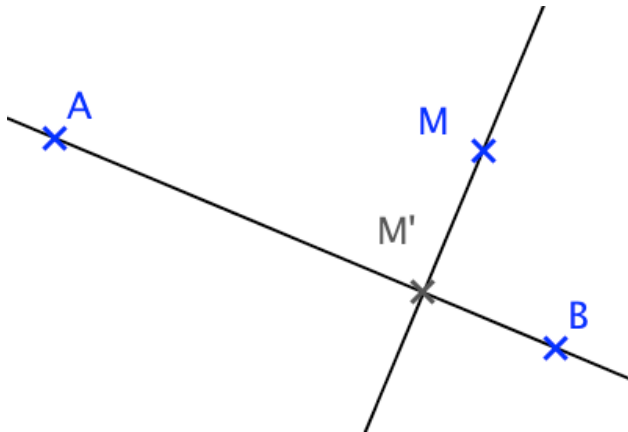
$$\text{Or } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = xx'' + yy''$$

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

VII Projection orthogonale

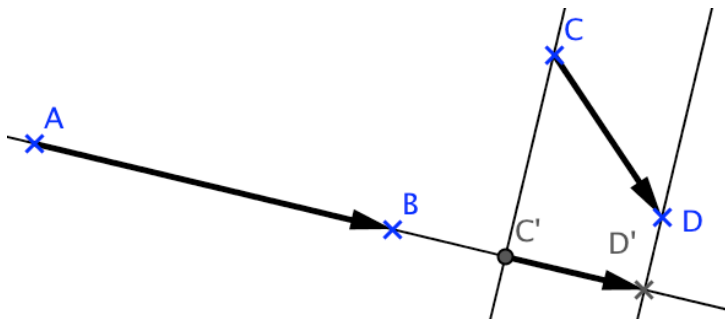
Définition :

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le **point d'intersection M'** de la perpendiculaire à (d) passant par M et la droite (d)



Propriété :

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont 2 vecteurs non nuls et C' et D' sont les **projetés orthogonaux de C et D** sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



$$\text{Dem : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}$$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'}$; C' étant le projeté orthogonal de C sur (AB),

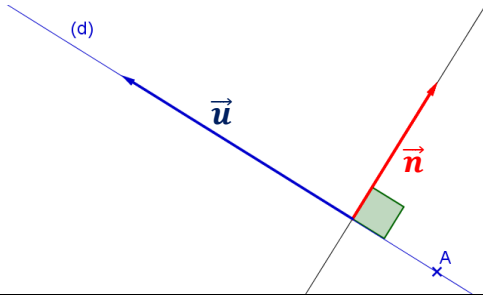
de même $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = 0$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

VIII Vecteur normal à une droite

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal à une droite** (d) signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) .

Conséquence : $\vec{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de (d)



Propriété :

Le point **M** appartient à la droite (d) passant par A et de vecteur **normal** $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Dém : soit d une droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{n}$ un vecteur normal

Démontrons que $M \in (d) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$M \in (d) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

Or $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d) donc $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Calculons $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (k\vec{u}) \cdot \vec{n} = k(\vec{u} \cdot \vec{n}) = k \times 0 = 0$

Réciproque : démontrons que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow M \in (d)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n} \neq \vec{0}$ or $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0} \quad \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ (Propriété admise : les vecteurs orthogonaux à un même vecteur sont tous colinéaires) donc $M \in (d)$

IX Équation d'une droite calculée en utilisant le vecteur normal

Propriété :

Le vecteur non nul $\vec{n}(a; b)$ est normal à la droite $(d) \Leftrightarrow$ La droite (d) a pour **équation cartésienne** :
 $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$

Ne pas confondre avec l'équation cartésienne obtenue à partir d'un vecteur directeur $\vec{u} : (-b; a)$

Dém :

$(\Rightarrow)$ Le vecteur non nul $\vec{n}(a; b)$ est normal à la droite (d)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point de la droite (d) ,

$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ soit $(x - x_A)a + (y - y_A)b = 0$

Soit $ax + by - x_Aa - y_Ab = 0$ Soit $ax + by + c = 0$

En posant $c = -x_Aa - y_Ab$

$(\Leftarrow)$ La droite (d) a pour équation $ax + by + c = 0$

avec $(a; b) \neq (0; 0)$ donc $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite (d) . Soit le vecteur $\vec{n}(a; b)$:
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = a \times (-b) + b \times a = -ab + ab = 0$

Le vecteur non nul $\vec{n}(a; b)$ est normal à la droite (d)