VARIATIONS DE FONCTION

I Sens de variation

Étudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle I c'est déterminer tous les intervalles inclus dans I sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante.

Définition : f est **strictement croissante sur I** si et seulement si
$\forall x_1 \in I\ et\ \forall x_2 \in I$, **si** $x_1 < x_2$ alors $\boldsymbol{f}(x_1) < f(x_2)$

Définition : f est **strictement décroissante sur I** si et seulement si pour tout réel $x_1\ et\ x_2$ appartenant **à I**, **si** $x_1 < x_2$ alors $\boldsymbol{f}(x_1) > f(x_2)$

II La fonction Racine carrée

a. Définition

La racine carrée d'un nombre positif ou nul a est le nombre positif ou nul x tel que $x^2=a$, on le note $x = \sqrt{a}$.

Remarques :

- La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas $\sqrt{0} = 0$
- La racine carrée d'un nombre strictement positif est un nombre strictement positif
- Si $a > 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$ et si $a < 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$ et $-a > 0$

Propriétés : soient a et b deux nombres positifs ou nuls.

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention, ce type de propriété ne fonctionne pas avec l'addition et la soustraction :

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ et\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

b. Ensemble de définition et sens de variation de la fonction racine carrée

Propriétés :

- Tout nombre positif ou nul x a une racine carrée donc la fonction racine carrée : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donc définie sur $[0;+\infty[$ noté aussi $\mathbb{R}^+$.
- La fonction racine carrée : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

dem : Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.
On cherche à prouver que f est croissante
c'est à dire que si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ c'est à dire $f(a) - f(b) < 0$
On sait que $0 \leq a < b$ et $f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ --> on utilise l'expression conjuguée :

$$f(a) - f(b) = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

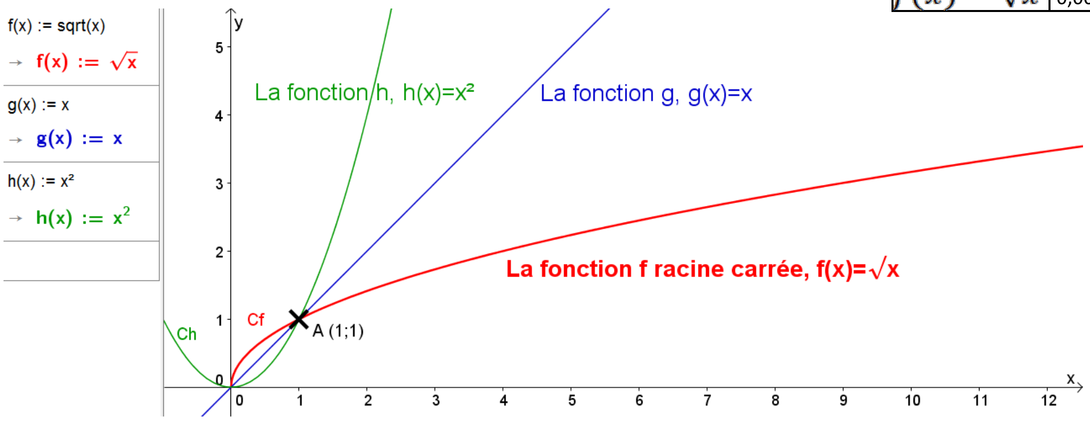
$0 \leq a < b$ donc $a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$ et $f(a) < f(b)$:

f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

c. representation graphique

Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	2	5	10
$f(x) = \sqrt{x}$	0,00	0,71	1,00	1,41	2,24	3,16



d. Comparaison de *f*, *g* et *h* : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$

Graphiquement, on observe que les 3 courbes de f, g et h ont 2 points communs : $O(0\,;0)$ et $A(1\,;1)$

Propriété :

- $\forall x \in [0;1]\,,\ x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
- $\forall x \in [1;+\infty[\,,\ \sqrt{x} \leq x \leq x^2$

dem :

On compare les fonctions f et h à la fonction g :

Si $x = 0, f(x) = g(x) = h(x) = 0$

Comparaison de *g* et *h* :

Si $x > 0, h(x) - g(x) = x^2 - x = x(x-1)$

$x > 0$, donc $h(x) - g(x)$ est du signe de $(x-1)$

$\forall x \in]0;1]\,, h(x) - g(x) \leq 0$

donc $h(x) \leq \text{g(x)}$ soit $x^2 \leq x$

$\forall x \in [1;+\infty[\,, h(x) - g(x) \geq 0$

donc $h(x) \geq \text{g(x)}$ soit $x^2 \geq x$

Comparaison de *f* et *g* :

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x = \frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{(\sqrt{x}+x)}$$

$$= \frac{x - x^2}{(\sqrt{x}+x)} = \frac{x(1-x)}{(\sqrt{x}+x)}$$

$x > 0$ et $(\sqrt{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}) > 0$,

donc $f(x) - g(x)$ est du signe de $(1-x)$

$\forall x \in]0;1]\,, f(x) - g(x) \geq 0$

donc $f(x) \geq g\text{(x)}$ soit $\sqrt{x} \geq x$

$\forall x \in [1;+\infty[\,, f(x) - g(x) \leq 0$

donc $f(x) \leq \text{g(x)}$ soit $\sqrt{x} \leq x$

III La fonction Valeur absolue

a. Définition de la fonction valeur absolue et notation

Si $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ $alors\ f(x) = x$

Si $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ $alors\ f(x) = -x$

on la note : $f(x) = |x|$

b. Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$ et $|-\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} = |\boldsymbol{x}|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y\ ou\ x = -y$

dem :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$ et $|-\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$

1er cas : $x \geq 0$ donc $|x| = x\ donc\ |\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$ et $|-\boldsymbol{x}| = \mathbf{x} = |\boldsymbol{x}|$

2ème cas : $x \leq 0$ donc $|x| = -x\ et\ -x \geq 0\ donc\ |\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$ et $|-\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Si $x \geq 0\ alors\ |x| = x\ or\ |x| = 0\ donc\ x = 0$

Si $x < 0\ alors\ |x| = -x\ or\ |x| = 0\ \ donc\ x = 0$ impossible car $x < 0$

On a démontré : $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

La réciproque : Si $x = 0$ alors $|x| = x$ donc $|x| = 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

Si $x \geq 0\ alors\ \sqrt{x^2} = x = |x|$

Si $x < 0\ alors\ \sqrt{x^2} = -x = |x|$

4) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y\ ou\ x = -y$

si $|x| = |y|$:

1er cas $x \geq 0$ et y ≥ 0 $|x| =$ x ; $|y| =$ y et donc x = y

2ème cas $x \geq 0$ et y ≤ 0 $|x| =$ x ; $|y| = -$y et donc x = -y

3ème cas $x \leq 0$ et y ≤ 0 $|x| = -$x ; $|y| = -$y et donc x = y

4ème cas $x \leq 0$ et y ≥ 0 $|x| = -$x ; $|y| =$ y et donc x = -y

dans tous les cas, x = y ou x = -y

réciproque :

si $x = y$ alors $|x| = |y|$

si $x = -y$ alors x et y sont opposés, l'un est positif, l'autre négatif,

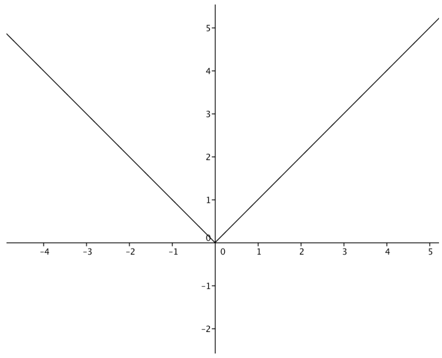
si $x \geq 0$ alors $|x| =$ x et y ≤ 0, $|y| = -$y = x = $|x|$

si $x \leq 0$ alors $|x| = -$x et y ≥ 0, $|y| =$ y = $-$x = $|x|$

c. Sens de variation et représentation graphique:

Propriété :

La fonction valeur absolue est décroissante sur R- et croissante sur R+



dem :

Sur R- c'est la fonction affine f(x)=-x de coefficient directeur -1, négatif donc elle est décroissante sur R-

Sur R+ c'est la fonction affine f(x) = x de coefficient directeur 1, positif donc elle est croissante sur R+

Propriétés : Lien avec les distances

On considère la droite des réels munie du repère (O ; I).

- Si M est un point d'abscisse x, alors OM = |x|.
- Si A et B sont deux points d'abscisses respectives a et b, alors AB = |a − b| = |b − a|.

IV Etude des fonctions $f + k$

a. Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et k un réel.

La fonction notée $u + k$ est la fonction définie sur D par $(u + k)(x) = u(x) + k$.

b. Propriété

Dans un plan muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe C_{u+k} est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k\vec{\jmath}$.

dem :

Pour tout réel x de l'ensemble I, on note A et B les deux points d'abscisse x appartenant respectivement à C_u et C_{u+k}. L'ordonnée de A est $u(x)$ et celle de B est $u(x) + k$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x - x\ ;\ u(x) + k - u(x))$ c'est-à-dire $(o\ ;\ k)$ donc $\overrightarrow{AB} = k\vec{\jmath}$.

Ainsi, l'ensemble des points de la courbe C_{u+k} est obtenu par translation des points de lacourbe C_u de vecteur $k\vec{\jmath}$.

c. Sens de variations

Propriété :

Soit u une fonction monotone sur un intervalle I et k un réel.

Les fonctions u et u + k ont le même sens de variation sur I.

V Étude des fonctions kf

a. Définition :

La fonction qui à tout réel x de D_f associe le réel $k\,f(x)$ est notée $k\,f$: Pour tout réel x de D_f, $(k\,f)(x) = k\,f(x)$

b. Propriété sens de variation :

Si k > 0 les fonctions f et $k\,f$ ont le même sens de variation

Si k < 0 les fonctions f et $k\,f$ ont des sens de variation contraire

dem :

Dans le cas où u est croissante sur I.

Soit a et b deux réels de I tels que a < b. u est croissante I sur donc u (a) ≤ u (b).

- Si k > 0 alors, en multipliant par k le sens est conservé, on a donc k ×u(a) ≤ k×u(b).

Ainsi la fonction ku est croissante sur I.

- Si k < 0 alors, en multipliant par k le sens change, on a donc k×u(a) ≥ k×u(b).

Ainsi, la fonction ku est décroissante sur I.

VI Variations des fonctions $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$

Propriété : Soit une fonction u, définie sur un intervalle I et positive sur cet intervalle, alors la fonction $v=\sqrt{u}$ a le même sens de variation que la fonction u sur I.

dem : 1er cas : Soit la fonction u, strictement croissante sur I et telle que $\forall x \in I$, $u(x) \geq 0$.
Soient a et b deux nombres de I tels que $a < b$. u est croissante, donc $u(a) < u(b)$.
De plus $0 \leq u(a) < u(b)$. La fonction racine carrée est croissante sur R+ donc $\sqrt{u(a)} < \sqrt{u(b)}$. Donc $v(a) < v(b)$, $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$. La fonction v a bien le même sens de variation que u.

Exemple : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

La fonction carrée est définie sur R et décroissante sur R- et croissante sur R+. $g(x)=x^2+1$ est définie sur R et strictement positive sur R. Elle est décroissante sur R- et croissante sur R+. Donc la fonction f est décroissante sur R- et croissante sur R+

Propriété : Soit une fonction u, définie sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur cet intervalle et dont le signe est constant sur cet intervalle, alors, la fonction $v=\frac{1}{u}$ et la fonction u varient en sens contraire sur I.

dem : 1er cas : La fonction u, strictement croissante sur I et telle que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$.
Soient a et b deux nombres de I tels que $a < b$. u est strictement croissante, donc $u(a) < u(b)$.
De plus $0 < u(a) < u(b)$. Donc $u(a)$ et $u(b)$ sont deux nombres de R+. La fonction inverse est décroissante sur R+ donc $\frac{1}{u(a)} > \frac{1}{u(b)}$. Donc $v(a) > v(b)$, $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$. La fonction v est strictement décroissante sur I et a bien le même sens de variation contraire de u.
$2^{\text{ème}}$ cas : La fonction u, strictement croissante sur I et telle que $\forall x \in I$, $u(x) < 0$.
$3^{\text{ème}}$ cas : La fonction u, strictement décroissante sur I et telle que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$.
$4^{\text{ème}}$ cas : La fonction u, strictement décroissante sur I et telle que $\forall x \in I$, $u(x) < 0$.

Exemple : La fonction $f(x)=\frac{1}{x+1}$ est définie sur R-{-1}. $x \mapsto x+1$ est une fonction croissante sur R, strictement négative sur R-* et strictement positive sur R+*.
Donc la fonction f est décroissante sur R-* et sur R+*