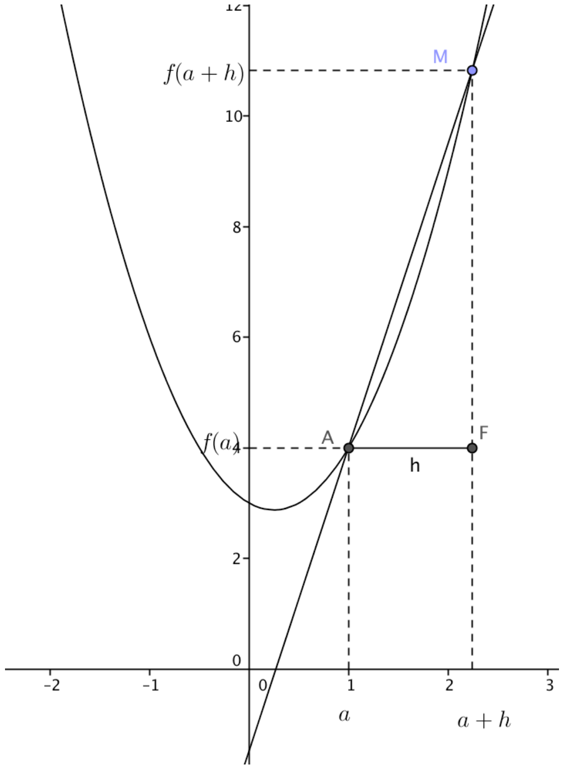
# Chap 4 Dérivation.

## I Taux d'accroissement

Définition : soit $f$, une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $a$, un réel de I et $h$ un réel non nul, tel que $a + h$ appartienne à I, on appelle taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+h$ le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.




Interprétation graphique :
Le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+h$ est la pente de la droite (AM) où A et M sont les points de $C_f$ d'abscisses $a$ et $a+h$.

$A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$
Soit $m$ le coefficient directeur de (AM) :

$$m=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

## II Nombre dérivé

Définition : Si, lorsque $h$ tend vers 0 (se rapproche de 0), le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+h$ tend vers un réel L, alors :
- On dit que la fonction $f$ est **dérivable** en $a$.
- On dit que L est le **nombre dérivé** de $f$ en $a$.

Vocabulaire et notation :
- le **nombre dérivé** de $f$ en $a$ se note *f'(a)*.
- L est appelé la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 et on le note : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

Exemple : $f(x)=2x^2-3$, définie sur R. Son nombre dérivé en $x=1$.
Son taux d'accroissement en1 est

$$\mathrm{T(h)}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2(1+h)^2-3-(-1)}{h}$$

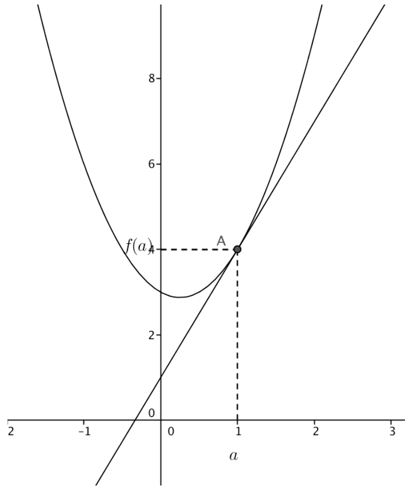
$$T(h)=\frac{2h^2+4h+2-3-(-1)}{h}=\frac{h(2h+4)}{h}$$

donc $T(h)=2h+4$ et $\lim\limits_{h\to 0}2h+4=4$

$f'(1)=4$

Interprétation graphique :
Dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand $h$ tend vers 0 c'est dire que lorsque le point M sur la courbe $C_f$ tend vers le point A, la droite (AM) tend vers une position limite : celle de la droite $T_A$, passant par A et de coefficient directeur *f'(a)*.

## III Tangente




Définition :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $a$, et $Cf$ sa courbe représentative.
On appelle tangente en A à la courbe $C_f$ la droite qui passe par $A(a; f(a))$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
Une équation de la tangente à $Cf$ au point d'abscisse $a$ est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

dem : l'équation de cette droite est $y = f'(a)x + p$ et $A(a; f(a))$ appartient à cette droite donc $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = -f'(a)a + f(a)$ et l'équation est $y = f'(a)x + -f'(a)a + f(a)$ et donc $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 3$, la tangente de $C_f$ en 1 a pour équation $y = 4(x-1) - 1$ donc $y = 4x - 5$.

## IV Fonction dérivée

Définition :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
Si, pour tout réel $a$ de I $f'(a)$ existe, on dit que $f$ est dérivable sur $I$.
On définit alors une nouvelle fonction $f'$ sur I par : $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple : $f(x) = 2x^2 - 3$, définie sur R.
Son taux d'accroissement en $a$ est
T$= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{2(a+h)^2 - 3 - 2a^2 + 3}{h} = \dfrac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 2a^2}{h} = \dfrac{h(4a+2h)}{h} = 4a + 2h$
$\lim\limits_{h \to 0} 4a + 2h = 4a$.
Le nombre dérivé de $f$ en $a$ est $4a$ donc $f'(x) = 4x$.

Propriétés : Dérivées des fonctions usuelles :

| Fonction | Ensemble de définition | Ensemble de dérivabilité | Fonction dérivée |
|---|---|---|---|
| $f(x) = mx + p$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f(x) = m$ |
| $f(x) = p$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f(x) = 0$ |
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f(x) = 2ax + b$ |
| $f(x) = x^n$ ; $n \in \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}$* | $\mathbb{R}$* | $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}$+ | $\mathbb{R}$+* | $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |

Démonstrations : dans chaque démonstration, le fait que **la limite du taux d'accroissement existe et soit un nombre fini prouve que la fonction est dérivable**.

$\boxed{f(x)=k}$: $f'_0(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_0(x+h)-f_0(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$ donc $f'_0(x) = 0$

$\boxed{f_1(x) = mx+p}$ $\quad f_1'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{m(x+h)+p-mx-p}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim\limits_{h\to 0} m = m$

donc $f_1$ est dérivable pour tout $x$ de $R$ et $f_1'(x) = m$

$\boxed{f_2(x) = ax^2+bx+c}$ **On calcule** $\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}$

$$T_{f2,x}(h) = \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$T_{f2,x}(h) = \frac{ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h} = \frac{2axh+ah^2+bh}{h} = \frac{h(2ax+b+ah)}{h}$$

$$T_{f2,x}(h) = 2ax+b+ah$$

$$\lim_{h\to 0}(2ax+b+ah) = 2ax+b$$

donc $f_2$ est dérivable pour tout $x$ de $R$ et $f_2'(x) = 2ax+b$

$\boxed{f_3(x) = \frac{1}{x}}$

Soit $\boldsymbol{x \neq 0}$ *et* $x+h \neq 0$ : *on peut choisir* $|h| < |x|$

$$T_{f3,x}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$T_{f3,x}(h) = \frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{h}{x(x+h)}\times\frac{1}{h}$$

$$T_{f3,x}(h) = -\frac{h}{xh(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} T_{f3,x}(h) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}$$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction est dérivable, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Et $\boldsymbol{f'_3(x) = -\frac{1}{x^2}}$

$\boxed{f_4(x) = \sqrt{x}}$

soit $x > 0$ *et* $|h| < x$ *ainsi* $x+h > 0$

$$T_{f4,x}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

*or* $\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right) > 0$ *Donc on peut multiplier et diviser par la forme conjuguée* ***non nulle***.

$$T_{f4,x}(h) = \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$T_{f4,x}(h) = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0} T_{f4,x}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction est dérivable $\forall x \in ]0;+\infty[$.

$$\boldsymbol{f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$\boxed{f_5(x) = x^3}$ $f_5'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_5(x+h) - f_5(x)}{h}$.

et $f_5(x+h) = (x+h)^3 = (x+h)(x^2+2hx+h^2) = x^3 + 2hx^2 + xh^2 + hx^2 + 2h^2x + h^3$

$f_5(x+h) = x^3 + 3hx^2 + 3xh^2 + h^3$

$$T_{f5,x}(h) = \frac{f_5(x+h) - f_5(x)}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$T_{f5,x}(h) = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$T_{f5,x}(h) = 3x^2 + 3xh + h^2$

$\lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction est dérivable, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$f_5'(x) = 3x^2$

## V Dérivées et opérations

Propriétés :

Soient u et v, deux fonctions définies et dérivables sur I et k, un réel.
La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$
La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$
La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$

$\boxed{u + v}$

soit $x \in I$, $u$ et $v$ sont dérivables en $x$

$$T_{u+v\ en\ x}(h) = \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h}$$

$$T_{u+v\ en\ x}(h) = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$T_{u+v\ en\ x}(h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

On admet que la limite d'une somme est égale à la somme des limites dans le cas où les limites finies existent.

$$\lim_{h \to 0} T_{u+v\ en\ x}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

u est dérivable en x donc $\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$

v est dérivable en x donc $\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$

$\lim_{h \to 0} T_{u+v\ en\ x}(h) = u'(x) + v'(x)$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction $u + v$ est dérivable sur I.

$\lim_{h \to 0} T_{u+v\ en\ x}(h) = (u+v)'(x)$ par définition de la dérivée.

$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

$\boxed{ku}$

soit $x \in I$, $u$ est dérivables en $x$ et k est un réel

$$\Delta_{ku\ en\ x}(h) = \frac{(ku)(x+h) - (ku)(x)}{h} = \frac{ku(x+h) - ku(x)}{h}$$

$\Delta_{ku\ en\ x}(h) = \frac{k(u(x+h) - u(x))}{h}$ =k $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$

On admet que la limite d'un produit est égal au produit des limites dans le cas où les limites finies existent.

or u est dérivable en x donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$

$\lim\limits_{h\to 0} T_{ku\ en\ x}(h) = ku'(x)$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction $ku$ est dérivable sur I.

$(ku)'(x)=ku'(x)$

$\boxed{uv: x \mapsto u(x)\times v(x)}$

soit $x \in I$, $u\ et\ v$ sont dérivables en $x$

$$T_{uv\ en\ x}(h)=\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}$$

$$T_{uv\ en\ x}(h)=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)=0$; on l'ajoute au numérateur :

$$T_{uv\ en\ x}(h)=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$T_{uv\ en\ x}(h)=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)}{h}+\frac{u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$T_{uv\ en\ x}(h)=v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

On utilise les deux propriétés sur les limites déjà admises.

$$\lim_{h\to 0} T_{uv\ en\ x}(h) = \lim_{h\to 0} v(x+h)\times \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+u(x)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$u\ est\ dérivable\ en\ x\ donc$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$

$v\ est\ dérivable\ en\ x\ donc$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$

$\lim\limits_{h\to 0} v(x+h)=v(x)$

$\lim\limits_{h\to 0} T_{uv\ en\ x}(h) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=(uv)'(x)$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction $uv$ est dérivable sur I.

<u>Conséquences :</u>

> Soit la fonction $\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{dérivable\ sur\ I}$
>
> On définit la fonction $\boldsymbol{u^2}$ $sur\ I\ par\ u^2(x)=\left(u(x)\right)^2$
>
> La fonctions $u^2$ est dérivable sur $I$ et $(\boldsymbol{u^2})'=\boldsymbol{2u'u}$

**dem :** $g(x)=u(x)\times u(x)$

Les fonctions $u\ et\ u$ sont dérivables sur I donc $g$ est dérivable sur I
et $g'(x)=u'(x)\times u(x)+u(x)\times u'(x)=2(u'(x)\times u(x))$

<u>Propriété :</u>

> Soit la fonction $\boldsymbol{u}$ **dérivable** sur l'intervalle **I et** $\boldsymbol{\forall x\in I, u(x)\neq 0}$
>
> On définit la **fonction** $\boldsymbol{\frac{1}{u}}$ $par\ \frac{1}{u}: x\mapsto \frac{1}{u(x)}$
>
> La **fonction** $\boldsymbol{\frac{1}{u}}$ **est <u>dérivable</u>** sur $I$ et $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\boldsymbol{\frac{u'}{u^2}}$

<u>Dém</u> : Soit $x\in I$, $u$ est dérivable en $x$ $et\ \frac{1}{u(x)}\ et\ \frac{1}{u(x+h)}$ sont définis car u ne s'annule pas sur I et $\boldsymbol{x\in I}$, en choisissant h suffisamment petit tel que $(\boldsymbol{x+h})\in \boldsymbol{I}$

$$T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = \frac{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}\right)(x+h) - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h}$$

$$T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = \frac{\frac{u(x)}{u(x+h)u(x)} - \frac{u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} = \frac{\frac{u(x)-u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h}$$

$$T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = -\frac{u(x+h)-u(x)}{u(x)u(x+h)} \times \frac{1}{h}$$

$$T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = -\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x)u(x+h)}$$

En admettant toujours que la limite d'un produit est égale au produit des limites dans le cas de limites finies.

$$\lim_{h\to 0} T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = -\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{u(x)u(x+h)}$$

$u\ est\ dérivable\ en\ x\ donc\ \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{u(x)u(x+h)} = \frac{1}{u^2(x)}$ et $\lim_{h\to 0} T_{\frac{1}{u} en\ x}(h) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \left(\frac{1}{u}\right)'(x)$

La limite du taux d'accroissement existe et est un nombre fini donc la fonction $\frac{1}{u}$ est **dérivable sur I**.

Propriété :

> Soit les fonctions $\boldsymbol{u\ \ et\ v}$ **dérivables** sur $l'intervalle\ \boldsymbol{I\ et}\ \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{v(x)} \neq \mathbf{0}$
>
> On définit la **fonction** $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\ par\ \frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$
>
> La **fonction** $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ **est dérivable** sur *I* et $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v-uv'}}{\boldsymbol{v^2}}$

dem :

$l(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ sur un intervalle $I$.

Les fonctions $u\ et\ v\ \ sont$ dérivables sur l'intervalle *I* et $\forall x \in I, v(x) \neq 0$.

$$l(x) = u(x) \times \frac{1}{v(x)}$$

$v$ est dérivable sur l'intervalle I et $\forall x \in I, v(x) \neq 0$.

donc $\frac{1}{v}$ est dérivable sur l'intervalle I et $\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{v'}}{\boldsymbol{v^2}}$

La fonction l est le <u>produit de 2 fonctions</u> dérivables sur un intervalle $I$ , donc la fonction $l$ est dérivable sur cet intervalle $I$:

$$l'(x) = u'(x) \times \frac{1}{v(x)} + u(x) \times \left(-\frac{\boldsymbol{v'(x)}}{\left(v(x)\right)^2}\right)$$

$$l'(x) = \frac{u'(x)v(x)}{\left(v(x)\right)^2} - \frac{v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$