Chap 7	Dérivation.

I Rappels : formules

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 2x$
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}+$	$\mathbb{R}+^*$	$f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Soient u et v, deux fonctions définies et dérivables sur I et k, un réel.

La fonction $u + v :\ x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$

La fonction $ku :\ x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$

La fonction $uv :\ x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$

La fonction $u^2 :\ x \mapsto \left(u(x)\right)^2$ est dérivable sur I et $(u^2)' = 2u'u$

Si en plus, la fonction v, dérivable sur l'intervalle I, est telle que $\underline{\boldsymbol{\forall x \in I\,, v(x) \neq 0}}$

La fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

La fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

<u>Méthode pour déterminer la fonction dérivée d'une fonction</u>

1) On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles).
2) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
3) On dérive séparément chacune des fonctions composant f .
4) On calcule $f\ '(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

<u>Exemple</u> : Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^2\ + 3$

f est un polynôme de degré 2 donc définie et dérivable sur R et $f'(x)\ =\ 4x$

- $g(x) = x^3(x + 2)$ g est le produit de deux fonctions polynômes $u(x)\ = x^3$ et $v(x)\ =\ x + 2$ donc g est dérivable sur R et $g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$g'(x) =\ 3x^2(x + 2) + 1\times x^3$
$g'(x) =\ 4x^3 + 6x^2$

- $h(x) = \frac{1}{x^4}$

h est une fonction quotient de la forme $\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 0\ ssi\ x = 0.$ Donc h est définie et dérivable sur R*

et $h'(x) = \frac{-u\prime(x)}{u^2(x)} = \frac{-4x^3}{x^8} = \frac{-4}{x^5}$

- $i(x) = \frac{x+1}{x^2}$ h est une fonction quotient de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 1\ et\ v(x) = x^2\ \ et\ v(x) = 0\ ssi\ x = 0.$

donc i est définie et dérivable sur R* et

$i'^{(x)} = \frac{x^2-2x(x+1)}{x^4} = \frac{x^2-2x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

II Signe de la dérivée et variations

Théorème (admis) : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée.

Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I (éventuellement nulle en un nombre fini de points), alors la fonction f est *strictement croissante* sur I.

Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I,(éventuellement nulle en un nombre fini de points), alors la fonction f est *strictement décroissante* sur I.

Si la fonction dérivée f' est nulle sur I : $\forall x \in I : f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Méthode pour déterminer les variations d'une fonction :
1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Exemple : Déterminer les variations de la fonction f définie sur R* par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$
D'après le I, $f'^{(x)} = \frac{-x-2}{x^3}$

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
$-x-2$	+	+	-
x^3	-	+	+
Signe de f'(x)	-	+	-
Variations de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

III Extremum d'une fonction

Définition :
1) On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in$ J : $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).
2) Dire qu'une fonction admet un extremum local signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

Propriété :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in$ I.
- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Réciproquement, si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

Exemples

Étudier les extremums des fonctions suivantes :

■ La fonction *f* définie sur R+* par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

f est une somme de fonctions définies et dérivables sur R+* donc *f* est définie et dérivable sur R+*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

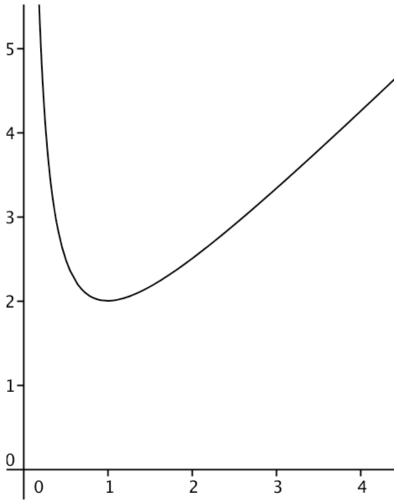
Le dénominateur est toujours strictement positif et le numérateur est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines : 1 et -1. Donc *f'* est positif sauf entre -1 et 1. On étudie cette fonction sur R+*.

f' s'annule en changeant de signe en 1.

$f'(x)$>0 si *x<1 ; f'(1) = 0 et* $f'(x)$*>0 si x<1.*

Donc *f'* s'annule en changeant de signe en 1.

$f(1)$ est un minimum local.



■ La fonction $g: x \mapsto x^3$ définie sur R

g est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur R et

$g'(x) = 3x^2$

g' s'annule en 0 mais ne change pas de signe : *g*'(*x*) >0 sur R*

g n'admet pas d'extremum local