

I Sens de variation

Définitions du sens de variation d'une suite :

La suite (u_n) est **strictement croissante** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$

La suite (u_n) est **strictement décroissante** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$

La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$

La suite (u_n) est **constante si et seulement si** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

La suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante

Méthode pour étudier le sens de variation :

- 1) **Calculer** $u_{n+1} - u_n$
- 2) **Réduire au même dénominateur si nécessaire et factoriser** $u_{n+1} - u_n$
- 3) En déduire le **signe de** $u_{n+1} - u_n$
- 4) **Conclure sur le sens de variation** de la suite

II Quelques cas particuliers

- 1) La suite arithmétique u de premier terme u_0 et de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$

$u_{n+1} - u_n = r$ Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de r

Si $r > 0$ la suite (u_n) est strictement croissante

Si $r < 0$ la suite (u_n) est strictement décroissante

Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante égale à u_0

- 2) La suite géométrique v de premier terme v_0 et de raison q : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = q \times v_n, q \neq 0$

$$v_{n+1} - v_n = q \times v_n - v_n = v_n(q - 1) = v_0 q^n (q - 1)$$

Si $q < 0$ on ne pourra pas conclure car le signe de q^n change quand n augmente de 1 et donc le signe de $v_{n+1} - v_n$ change aussi

Si $q > 0$ alors $q^n > 0$ Donc $v_{n+1} - v_n$ est du signe de $v_0(q - 1)$

- Si $(v_0 > 0 \text{ et } q > 1)$ ou $(v_0 < 0 \text{ et } 0 < q < 1)$ alors

$\forall n \in \mathbb{N} v_{n+1} - v_n > 0$ Donc la suite (v_n) est **strictement croissante**

- Si $(v_0 > 0 \text{ et } 0 < q < 1)$ ou $(v_0 < 0 \text{ et } q > 1)$ alors

$\forall n \in \mathbb{N} v_{n+1} - v_n < 0$ Donc la suite (v_n) est **strictement décroissante**

- Si $(v_0 = 0 \text{ ou } q = 1)$ alors $\forall n \in \mathbb{N} v_{n+1} - v_n = 0$

Donc la suite (v_n) est **constante**

3) La suite définie par $u_n = f(n)$.

Propriété :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$

► Si f est une fonction strictement **croissante** sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante**.

► Si f est une fonction strictement **décroissante** sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante**.

Dém : $\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1$

• Si f est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $n < n + 1$, alors $f(n) < f(n + 1)$ soit $u_n < u_{n+1}$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante

• Si f est une fonction strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et $n < n + 1$, alors $f(n) > f(n + 1)$ soit $u_n > u_{n+1}$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante

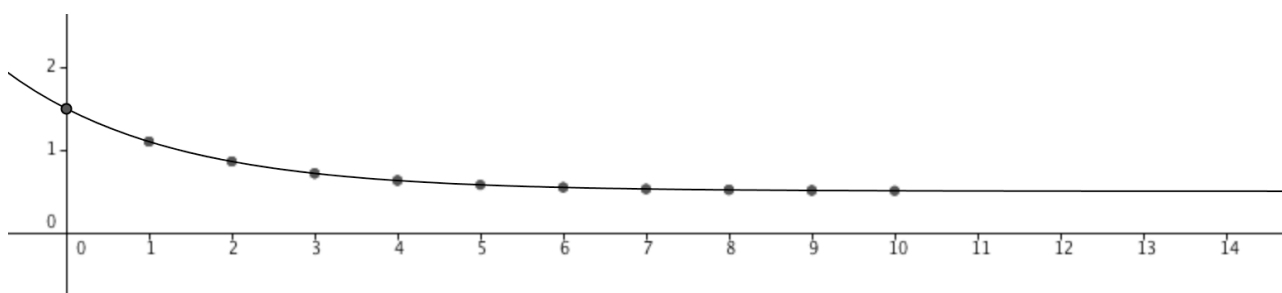
III Limite d'une suite approche intuitive par la représentation graphique

1. Suites convergentes

a) Suite définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$

Exemple : $u_n = 0,5 + 0,6^n ; \forall n \in \mathbb{N}$

On trace la représentation graphique de la fonction f et les points d'abscisses 0, 1, 2, 3 ... ont pour ordonnées $u_0, u_1, u_2 \dots$



b) Suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

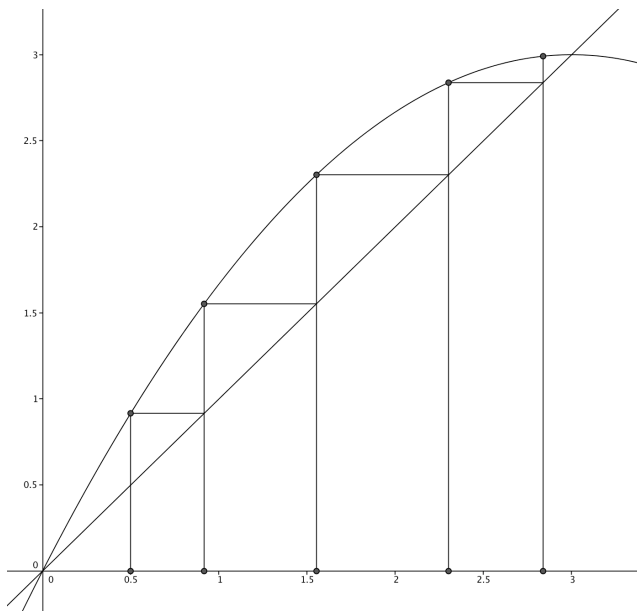
Exemple : $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On trace la représentation graphique de la fonction f et on place le point d'abscisses u_0 de la courbe. Puis, on répète pour chaque point en commençant par le point de la courbe d'abscisse u_0 .

- Placer le point de la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée.
- L'abscisse u_i de ce point est le terme suivant de la suite.
- Placer le point de la courbe ayant cette abscisse u_i .

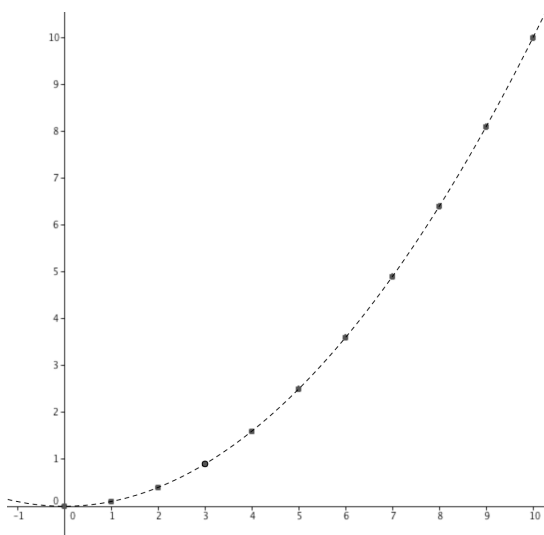
Répéter les trois instructions pour chaque terme de la suite

Les u_i se lisent sur l'axe des abscisses.



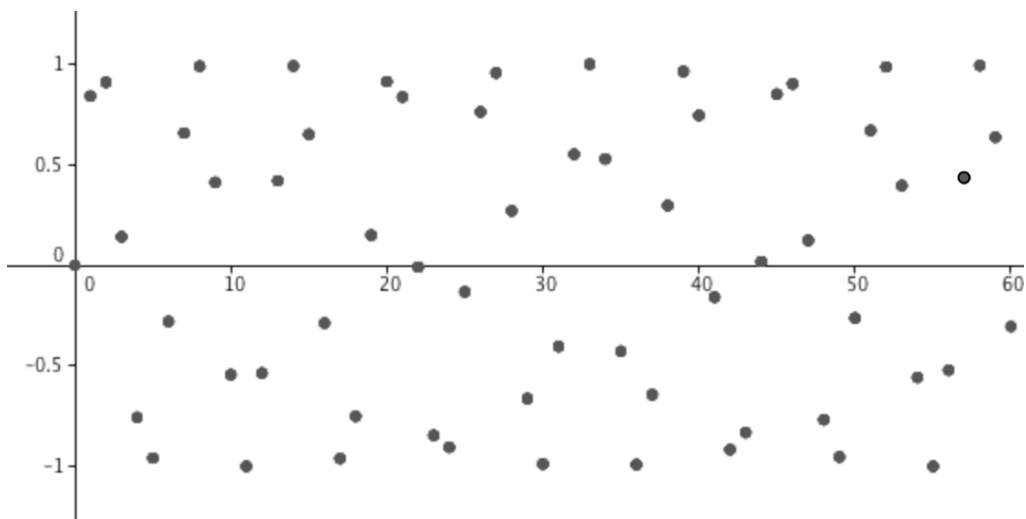
2. Suites divergentes

Exemple : $u_n = \frac{1}{10} n^2 ; \forall n \in \mathbb{N}$



3. Suites n'ayant pas de limite

Exemple : $u_n = \sin(n) ; \forall n \in \mathbb{N}$



IV Approche algébrique d'une limite

1) Limite finie

Définition : Soit L un réel, une suite (u_n) a pour limite L lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout intervalle ouvert I , aussi petit soit-il, contenant L , il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \in I$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

On dit que la suite (u_n) converge vers L lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarques :

- La limite est unique lorsqu'elle existe.

Signification de la limite :

- Quel que soit le petit intervalle I entourant L** , par exemple du type $I =]L - y, L + y[$ avec y très petit, on trouve un entier n_0 à partir duquel pour tout $n, n \geq n_0$ **tous les u_n appartiennent à I** (ce qui signifie que u_n est très proche de L à une distance inférieure à y de L)
- Quand n augmente infiniment, u_n se rapproche de L .

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \text{ } n > 0}$, $u_n = \frac{n+1}{n}$. Étude de la $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Choisissons différents intervalles I contenant 1 et trouvons graphiquement n_0 tel que à partir de n_0 tous les u_n sont dans I . Attention cela ne prouve pas la limite !

Exemple : On cherche un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle : $]1 ; 1,1[$

Montrons que (u_n) est décroissante :

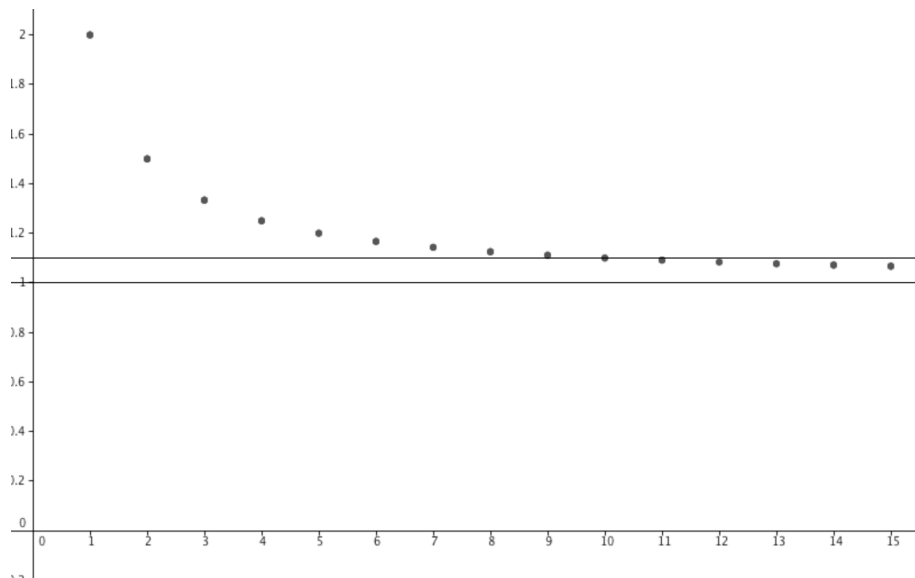
$$1. u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

$$2. u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} > 0 \text{ donc } u_n > 1$$

$$3. u_{n_0} < 1,1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n_0} < 1,1 \Leftrightarrow \frac{1}{n_0} < 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{0,1} < n_0 \Leftrightarrow n_0 > 10$$

A partir du rang n_0 , tous les termes de la suite appartiennent à $]1 ; 1,1[$.



2) Limite infinie

Définition : Une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de la forme $I =]A, +\infty[$, il existe n_0 tel que pour tout n , $n \geq n_0$, u_n appartient à I .

- On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite diverge.
- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, on ne parle pas de convergence.

Signification de la limite infinie :

- Quel que soit le nombre A , aussi grand soit-il, on trouve un entier n_0 à partir duquel pour tout n , $n \geq n_0$ tous les u_n sont plus grand que A .

Remarque : Une suite (u_n) a pour **limite** $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout intervalle ouvert I de la forme $I =]-\infty; A[$, il existe n_0 tel que pour tout n , $n \geq n_0$, u_n appartient à I .

Exemples : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n = n^2$

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 4 \quad u_3 = 9 \quad u_4 = 16 \quad u_5 = 25 \dots$$

Exemple : On cherche un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 1000.

Montrons que (u_n) est croissante :

1. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0$ car n est un entier naturel positif.
donc (u_n) est strictement croissante.

2. on cherche n_0 tels que $u_{n_0} > 1000 \Leftrightarrow n_0^2 > 1000 \Leftrightarrow n_0 > \sqrt{1000}$;
 $n_0 = 32$ convient. En effet $32^2 = 1024$.

De plus $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n_0}$ car (u_n) est strictement croissante. Donc à partir du rang n_0 , tous les termes de la suite appartiennent sont supérieurs à 1000.

2) Suites n'ayant pas de limite infinie

C'est une suite qui n'est ni convergente, ni divergente.

Exemples :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n = 1 + (-2)^n$

Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$