Étude de fonction / Optimisation exercices + corrigé

Exercice 1 : Avec une fonction auxiliaire

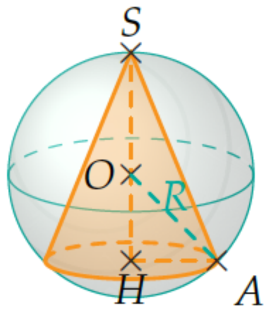
1) Soit g la fonction définie sur $]-4\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + 6x^2 + 1$.
   a) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.
   b) En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]-4\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x+4}$
   a) Déterminer $f'(x)$.
   b) À l'aide de la question 1), en déduire les variations de f.

Exercice 2 : Déterminer le nombre minimum que l'on obtient en ajoutant un nombre strictement positif à son inverse.

Exercice 3 : Un cône dans une sphère

On considère une sphère de centre O et rayon R et dans cette sphère, un cône comme indiqué dans la figure ci contre.
Quel est le volume maximal du cône ?
Indication : dans cet exercice, on peut choisir comme variable d'étude soit r = HA, soit x = HO.
Essayer les deux approches.



Exercice 1 :

1. a) g est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur R

$g'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

x	-4	0	$+\infty$
Signe de g'	-		+
Var de g	$\searrow$	1	$\nearrow$

b) g(0) = 1 donc 1 est le minimum de g sur $]-4\,;+\infty[$
donc $\forall x \in]-4\,;+\infty[: g(x) > 0$

2. Soit f la fonction définie sur $]-4\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x+4}$

a) f est une fonction quotient u/v avec $v(x) \neq 0 \;\; \forall x \in]-4\,;+\infty[$ donc f est définie et dérivable sur $]-4\,;+\infty[$.

$f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad u(x) = x^3 - 2 \quad v(x) = x + 4$

$\qquad\qquad u(x) = 3x^2 \qquad v(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+4) - (x^3-2)}{v^2(x)} = \frac{3x^3 + 12x^2 - x^3 + 2}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2} = \frac{2(x^3 + 6x^2 + 1)}{(x+4)^2} = \frac{2g(x)}{(x+4)^2}$$

$(x+4)^2 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ donc le signe de f' est le signe de g sur $]-4\,;+\infty[$

b) $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in]-4\,;+\infty[$

x	-4	$+\infty$
Signe de f'	+	
Var de g	$\nearrow$	

Exercice 2 : Soit x ce nombre strictement positif .

Soit f la fonction définie sur R+* par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

f est la somme d'une fonction affine et d'e la fonction inverse donc est définie et dérivable sur R+* et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
Signe de g'	-		+
Var de g	$\searrow$	2	$\nearrow$

$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$
2 est le minimum de f sur R+* donc le nombre minimum que l'on obtient en ajoutant un nombre strictement positif à son inverse est 2

Exercice 3 :

$$V = \frac{\pi (HA)^2 SH}{3} = \frac{\pi r^2 (R+x)}{3}$$

Le volume dépend de 3 variables :

- R, le rayon de la sphère. Ce nombre n'est pas connu mais il est fixe car dans l'exercice on cherche à placer un cône dans une sphère donc ce n'est pas la taille de la sphère qui est modifiée mais l'emplacement du disque de base.
- r, le rayon du disque de base, plus il se rapproche du centre de la sphère, plus il augmente
- x, la partie « basse » de la hauteur du cône, qui est liée au rayon r : elle diminue lorsque le disque se rapproche du centre.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHA, rectangle en H :
$x^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - x^2$
On utilise cette égalité pour « éliminer » la variable « r » du calcul du volume. Le volume ne sera plus exprimé qu'en fonction de x (la variable) et de R, nombre fixe.

$$V(x) = \frac{\pi (R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(R^3 + xR^2 - Rx^2 - x^3)$$

$V(x)$ est un polynôme de degré 3 donc défini et dérivable sur R.
x varie de 0 à R/2 donc on étudie V sur [0 ;R/2]

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2Rx - 3x^2)$$

- R est une racine évidente de ce polynôme.

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(x+R)(-3x+R)$$

x	0	$\frac{R}{3}$	$\frac{R}{2}$
Signe de V'(x)	+	-	
Var de V			

$$V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi (R^2 - \frac{R^2}{9})(R + \frac{R}{3})}{3} = \frac{\pi \frac{8R^2}{9} \times \frac{4R}{3}}{3}$$

$$V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$$

$V(x)$ atteint son maximum $\frac{32\pi R^3}{81}$ en R/3.

Le volume maximal du cône est $\frac{32\pi R^3}{81}$