Correction du contrôle de mathématiques

Exercice 1 (10 points)

Dans un repère orthonormé, on donne la droite (d) d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ le point $A(1; 7)$ et le vecteur $\vec{v}(2; -3)$

1. Dans ce repère tracer la droite (d), placer A et construire $\vec{v}$
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de (d).

Le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) a pour coordonnées : $\vec{u}\ (3; 2)$

3. Construire le vecteur $\vec{w}$ (laisser les traces de construction) défini par $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

Calculer ensuite les coordonnées de $\vec{w}$

Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées : $\vec{w}$: $\left(2\times 3 - \frac{1}{2}\times 2; 2\times 2 - \frac{1}{2}\times(-3)\right)$ c'est-à-dire $\left(5\,; \frac{11}{2}\right)$

4. $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Sachant que $\vec{v}(2; -3)$ et que $\vec{w}\ \left(5\,; \frac{11}{2}\right)$

On a $2\times\frac{11}{2} = 11$ et que $-3\times 5 = -15$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires

5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$, puis la tracer.

La droite (d') a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$

C'est-à-dire $-3x - 2y + c = 0$

Or le point A est un point de la droite (d')

Donc $-3\times 1 - 2\times 7 + c = 0$

D'où $c = 17$

Donc on a $-3x - 2y + 17 = 0$

Don$-3x - 2y + 17 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d') passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$

6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d')

Soit M$(x; y)$ le point d'intersection de (d) et (d')

Les coordonnées de M vérifient le système : $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ -3x - 2y + 17 = 0 \end{cases}$

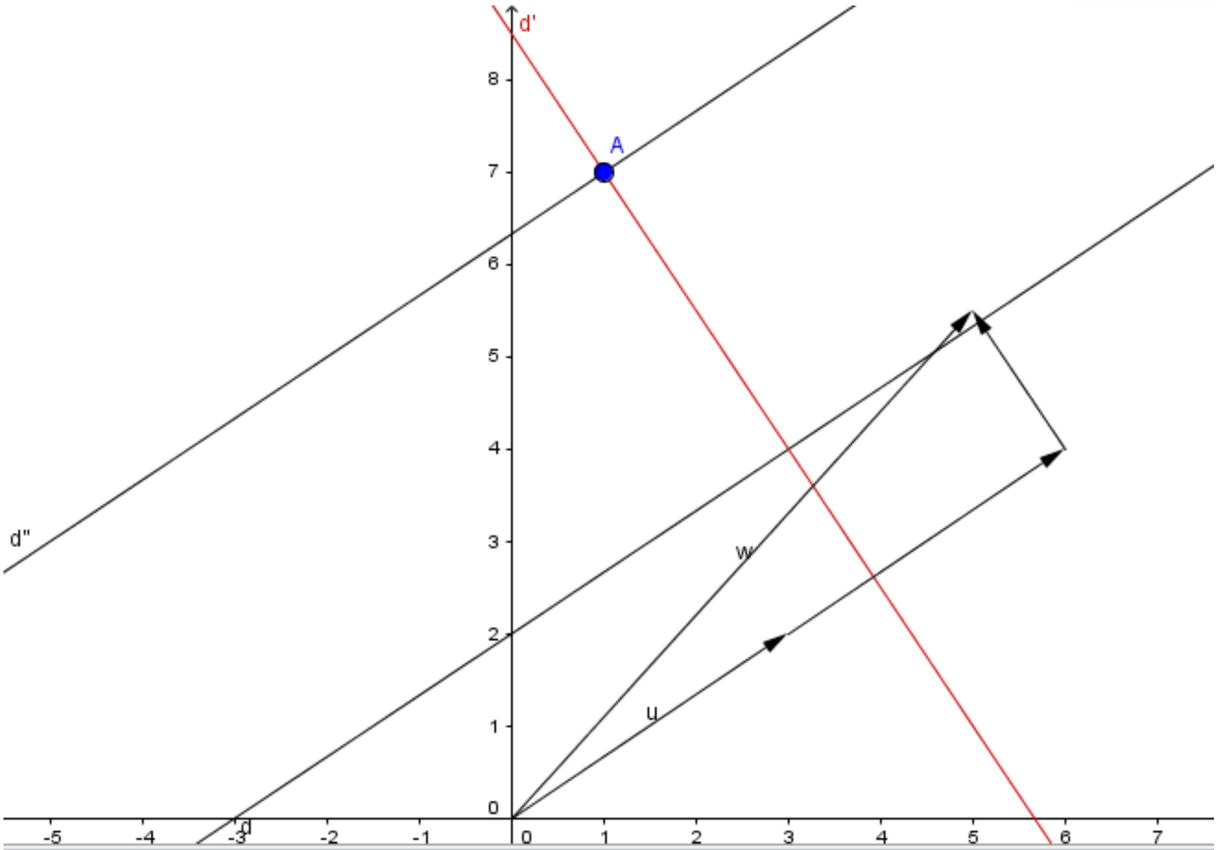
équivaut à $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

D'où $S = \{(3; 4)\}$

7. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d'') parallèle à (d) passant par A puis tracer (d'')

Sachant que la droite (d'') est parallèle à (d) et passe par A on a $2x - 3y + c = 0$ et $2\times1 - 3\times7 + c = 0$

D'où une équation cartésienne de la droite (d'') est $2x - 3y + 19 = 0$



Exercice 2 (4 points)

Soit h la fonction définie par h(x) = | - 6 x² + 4x + 2 |

1. Calculer h(-2), h($\frac{1}{2}$) et h(2)

$h(-2) = |-6(-2)^2 + 4(-2) + 2|$

$h(-2) = 30$

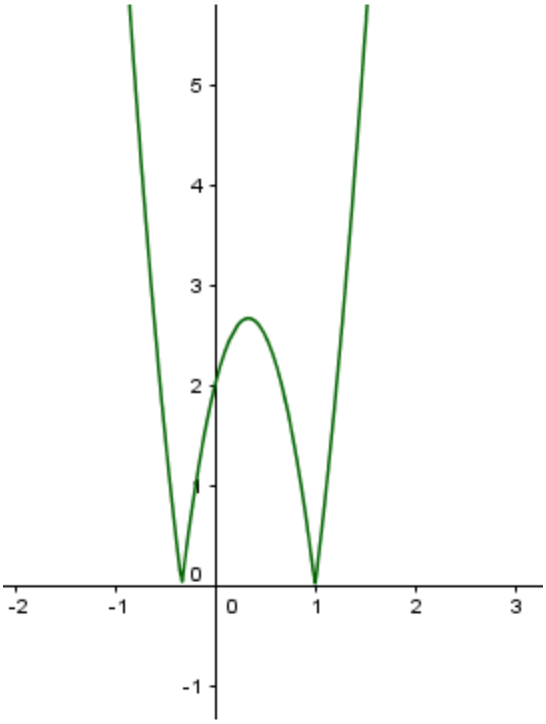
$h(\frac{1}{2}) = |-6(\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}) + 2|$

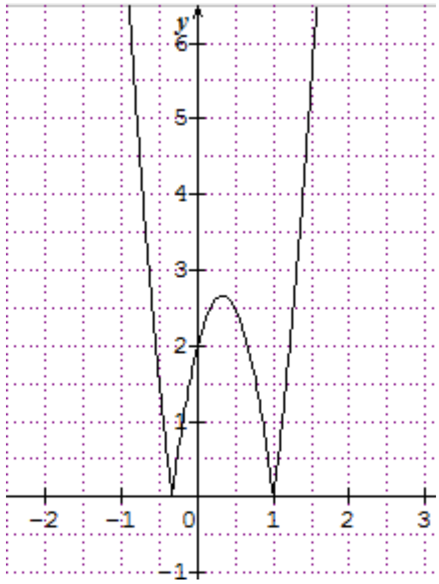
$h(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$

$h(2) = |-6\times2^2 + 4\times2 + 2|$

$h(2) = 14$

2. En prenant le centimètre comme unité dans un repère orthonormé, tracé la courbe représentative de la fonction h.





3. Après avoir donné l'équation de la fonction h sans symbole valeur absolue, donner le tableau de variation de la fonction h.

Si x ϵ] - ∞ ; - 1/3 [U] 1 ; + ∞ [alors h(x) = - 6 x² + 4x + 2

Si x ϵ [- 1/3 ; 1] alors h(x) = 6 x² - 4x - 2

Exercice 3 : (3 points)

Démontrer que la fonction $f: x \to \sqrt{x+5}$ est une fonction croissante et préciser sur quel intervalle.

Soient deux points u et v de$[-5; +\infty[$
Ainsi $-5 \leq u < v$
équivaut à $0 \leq u+5 < v+5$

Or $\sqrt{u+5} - \sqrt{v+5} = \frac{(\sqrt{u+5}-\sqrt{v+5})(\sqrt{u+5}+\sqrt{v+5})}{\sqrt{u+5}+\sqrt{v+5}}$ avec $\sqrt{u+5} + \sqrt{v+5} > 0$

Donc $\sqrt{u+5} - \sqrt{v+5} = \frac{(u+5)-(v+5)}{\sqrt{u+5}+\sqrt{v+5}}$
équivaut à $\sqrt{u+5} - \sqrt{v+5} = \frac{u-v}{\sqrt{u+5}+\sqrt{v+5}}$

D'où $\sqrt{u+5} - \sqrt{v+5} < 0$ car $u - v < 0$

Donc $\sqrt{u+5} < \sqrt{v+5}$ pour tout u et v de$[-5; +\infty[$
La fonction f est donc une fonction croissante sur $[-5; +\infty[$

Exercice 4 : (3 points)

Déterminer les points d'intersection des courbes représentatives de la fonction f et de la fonction g
$f : x \to - x^2 + 2x + 2$
et
$g : x \to |x+2| - 2$

Chercher les abscisses des éventuels points d'intersection des deux courbes C_f et C_g revient à résoudre
$- x^2 + 2x + 2 = x + 2 - 2$ avec x appartient à $[-2 ;+\infty[$ (3)
(3) équivaut à $-x^2 + x + 2 = 0$ avec x appartient $[-2 ;+\infty[$
(3) équivaut à x= -1 ou x= 2

$- x^2 + 2x + 2 = - x - 2 - 2$ avec x appartient à$]-\infty ; -2]$ (4)
(4) équivaut à $-x^2 + 3x + 6 = 0$ avec x appartient $]-\infty ; -2]$
(4) équivaut à x = $\frac{-3+\sqrt{33}}{-2}$ ou x = $\frac{-3-\sqrt{33}}{-2}$ avec x appartient $]-\infty ; -2]$

Les points des deux courbes C_f et C_g ont pour abscisses -1 ou 2