Nom : ……………… 26/11/14

DST commun de Mathématiques 2^{des}

Calculatrice graphique autorisée

Exercice 1 : Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) (x – 3) (8x – 2) = (4x – 1) ²

$(x-3)\times 2\times(4x-1)-(4x-1)^2=0, en\ factorisant:$

$(4x-1)\ (2(x-3)-(4x-1))=(4x-1)(-2x-5)=0$

Soit : $\begin{cases} 4x-1=0\ donc\ x=\frac{1}{4} \\ 2x+5=0\ donc\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$ donc $S=\{-\frac{5}{2}\ ;\frac{1}{4}\}$

b) x² + 5 = 0 soit $x^2=-5, il\ n'y\ a\ pas\ de\ solution\ car\ un\ carré\ est\ toujours\ positif\ ou\ nul\ donc$

$S=\emptyset$

c) 4(x – 1)² = 9 $soit\ 4(x-\ 1\ )^2-\ 9=0\ on\ repèrel'identité\ remarquable\ a^2-b^2 donc\ \ on\ a:$

$(2(x-1)+3)(2(x-1)-3)=(2x+1)(2x-5)=0\ soit:\begin{cases}2x+1=0\\2x-5=0\end{cases}$ donc $S=\{-\frac{1}{2}\ ;\frac{5}{2}\}$

Exercice 2 : Répondre par Vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Le total est ramené à 0 s'il est négatif.

a) Toute fonction croissante sur [0 ;5] est positive sur [0 ;5]. FAUX

b) Toute fonction qui n'est ni croissante, ni constante sur $[-3;6]$ est décroissante sur $[-3;6]$. FAUX

c) Si f(4) ≥ f(5) alors f est décroissante sur $[4;5]$.FAUX

d) f étant définie sur un intervalle I, s'il existe deux nombres a et b de I avec a ≤ b et $f(a)\geq f(b)$, alors f est décroissante sur I.FAUX

e) Si, pour tous réels a et b appartenant à $]0;1[$ tels que b ≥ $a\ ou\ a\leq b$, $f(a)\leq f(b)$, alors f est croissante sur $]0;1[$. VRAI

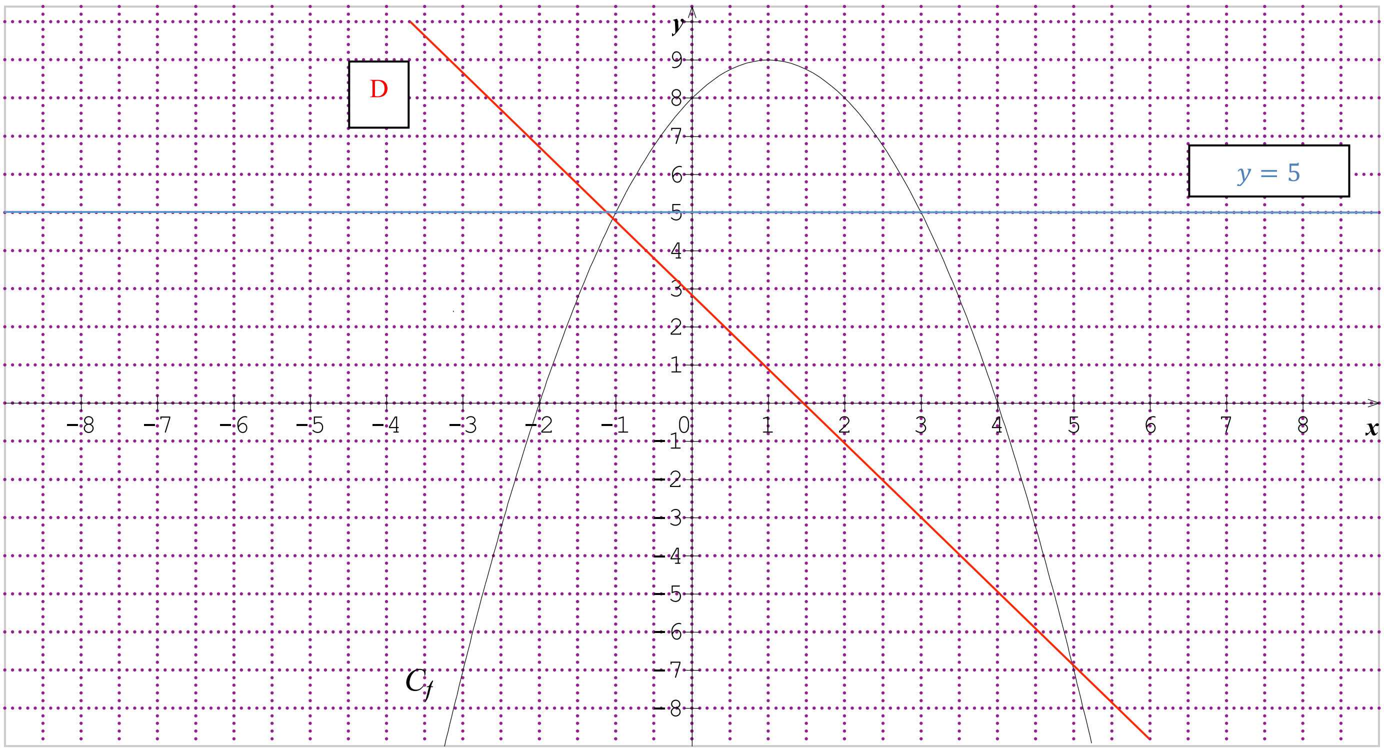
f) Si f est décroissante sur $[-3;2]$, alors quel que soit x appartenant à $[-3;2]$, $f(x)\leq f(-3)$.VRAI

Exercice 3 : Compléter le tableau suivant :

Langage des fonctions	*Langage algébrique*	*Langage lié au graphique*
La fonction est croissante	$\forall u$ et $v \in I$ si $u \leq v$ alors $f(u) \leq f(v)$	La courbe « monte »
Calculer le (ou les) éventuel(s) antécédents de 3 par la fonction *f*	*Résoudre l'équation* $f(x) = 3$	*Donner les abscisses des points d'intersection de* C_f *et de la droite d'équation* $y = 3$
Déterminer tous les réels de I dont l'image par f est strictement inférieure à 2	Résoudre l'inéquation *f*(*x*) < 2	*Donner les abscisses des points de* C_f *qui se trouvent en dessous de la droite d'équation* $y = 2$

Exercice 4 : **Partie A**

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur ℝ .



1° Dans cette question, les réponses sont à lire sur le graphique et aucune justification n'est demandée.

a) Déterminer les images par f de 0 et de -1. $f(0) = 8$ *et* $f(-1) = 5$

b) Donner les antécédents éventuels par f de -7 et de 10.

-7 *a deux antécédents :* -3 *et* 5 ; 10 *n'a pas d'antécédent.*

c) Quel est le maximum de f sur IR ? 9 Pour quelle valeur de x est-il atteint ? pour x=1.

d) Si $0 \leq x \leq 4$, donner le meilleur encadrement graphique possible de f(x). $0 \leq f(x) \leq 9$

2° Soit g une fonction dont la représentation graphique est une droite D. On donne g(-1) = 5 et g(5) = -7.

Directement sur le graphique ci-dessus, tracer la droite D.

3° Résoudre graphiquement en justifiant vos réponses :

a) L'équation f(x) = 5 Les solutions de l'équation f(x)=5 sont les abscisses des points d'intersection de la droite (D) avec C_f S ={-1 ;3}

b) L'inéquation f(x) ≤ 0 Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ sont les abscisses des points C_f qui se trouvent en dessous de l'axe des abscisses. $S =]-\infty\,;-2] \cup [4\,;+\infty[$

c) L'inéquation f(x) > g(x) Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$sont les abscisses des points C_f qui sont strictement au dessus de la droite (D) S =]-1;5[

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur IR par f(x) = - x² + 2x + 8

1° Calculer l'image par f de 1 - $\sqrt{3}$

$$f(1-\sqrt{3}) = -(1-\sqrt{3})^2 + 2(1-\sqrt{3}) + 8 = -(1-2\sqrt{3}+3) + 2 - 2\sqrt{3} + 8 = 6$$

2° Le point $A(\frac{5}{2}\,;\frac{13}{2})$ est-il un point de la courbe C_f ? Justifier par un calcul.

$$on\ calcule\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4} \neq \frac{13}{2}\ donc\ A\ n'est\ pas\ un\ point\ de\ C_f$$

3° Déterminer par le calcul les antécédents éventuels par f de 8.

$$Les\ antécédents\ de\ 8\ par\ f\ sont\ les\ solutions\ de\ l'équation\ f(x) = 8$$

$$soit\ -x^2 + 2x + 8 = 8\ ou\ -x^2 + 2x = 0\ \ ou\ x(2-x) = 0\ \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}\ \ S = \{0\,;2\}$$

4° Démontrer par le calcul le résultat de la question de la partie A 1° c)

On veut montrer que pour tout x, $f(x) \leq f(1) = 9$ qui prouverait que 9 est le maximum de f sur ℝ.

Pour comparer 2 nombres, on calcule la différence des 2 nombres, on factorise pour en étudier le signe

$f(x) - 9 = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0$ *car le carré:* $(x-1)^2 \geq 0$ *pour tout* x

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) - 9 \leq 0$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 9$ donc 9 est le maximum de f sur ℝ.

Exercice 5 :

A l'aide de votre calculatrice, et sans justification, tracer le tableau de variation de la fonction f définie sur [-5 ;5] par

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 15x.$

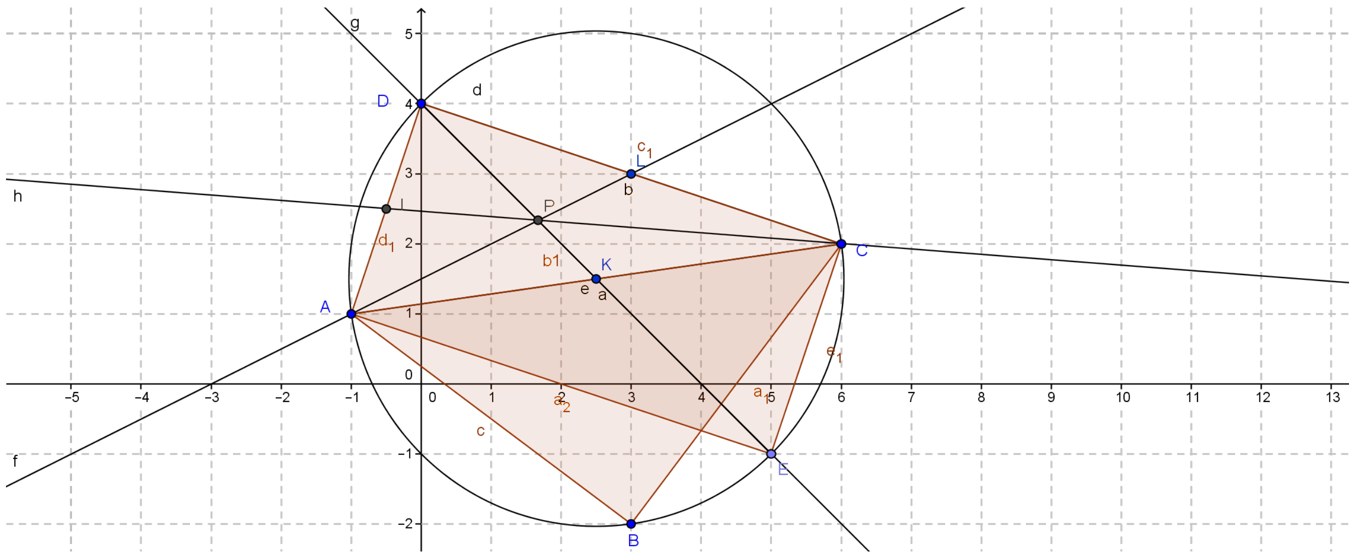
x	-5		-2,81		-0,67		1,98		5
$f(x)$	200			↗	5,16			↗	550
		↘	-18,8			↘	-38,4		

A l'aide des instructions « valeur », « minimum », « maximum » et « zero »

Courbe pour votre information :

Exercice 6: Dans un repère orthonormé (O,I,J), on considère les points A(-1 ;1), B(3 ;-2), C(6 ;2) et D(0 ;4). K est le milieu du segment [AC] et L est le milieu du segment [CD].

1) Faire une figure que l'on complétera.



2) Calculer les coordonnées du point K.

$$x_K = \frac{-1+6}{2} = 2,5 \ \ et \ y_K = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

3) Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse.

$AB^2 = (3-(-1))^2 + (-2-1)^2 = 25$ et donc AB $= 5$

$BC^2 = (6-3)^2 + (2-(-2))^2 = 25$ et donc BC= 5

$AC^2 = (6-(-1))^2 + (2-1)^2 = 50 \ et \ donc \ AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

AB=BC donc **ABC est isocèle en B**

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore **le triangle ABC est rectangle en B**

4) On note ***C*** le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Déterminer le centre du cercle ***C*** et calculer son rayon.

ABC est rectangle en B et [AC] est donc son hypoténuse donc d'après la propriété du centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse.

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu K de [AC]

$\boldsymbol{Le\ rayon\ du\ cercle}$ $est\ donc\ égal\ à\ \frac{AC}{2} = 2{,}5\sqrt{2}$

b) Montrer que D est un point de ***C***.

$DK = \sqrt{(2{,}5-0)^2 + (1{,}5-4)^2} = \sqrt{2 * 2{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{2}$

$Donc\ DK\ est\ égal\ au\ rayon\ du\ cercle\ de\ centre\ K\ donc$ $\boldsymbol{D\ appartient\ au\ cercle\ C}$

5) Déterminer les coordonnées du point E symétrique du point D par rapport à K.

$K\ doit\ être\ le\ milieu\ de\ [DE]\ donc\ x_K = 2{,}5 = \frac{0 + x_E}{2}\ soit\ x_E = 5\ et\ y_K = 1{,}5 = \frac{4 + y_E}{2}\ soit\ y_E = -1$

E(5 ;-1)

6) Déterminer sans calcul la nature du quadrilatère ADCE.

Le quadrilatère ADCE a pour diagonales [AC] de milieu K (énoncé) et [DE] de milieu K (centre de symétrie de E et D). Ces deux diagonales ayant le même milieu ADCE est un parallélogramme.

Par ailleurs les diagonales du parallélogramme sont de même longueur puisque $AC = 5\sqrt{2}\ et$

$DE = 5\sqrt{2}\ puisque\ c'est\ un\ diamètre\ de\ C.$ **Donc ADCE est un RECTANGLE**

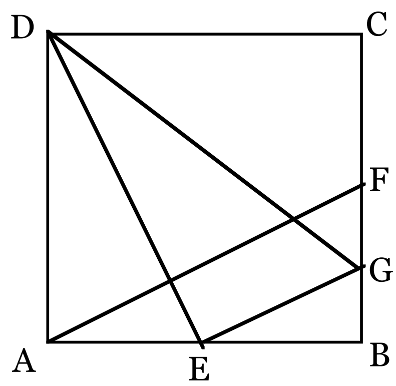
7) Les droites (AL) et (DK) se coupent en P. Montrer que la droite (CP) coupe [AD] en son milieu.

(AL) et (DK) sont deux médianes de DAC sécantes en K.

Or les 3 médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de gravité diu triange.

K est donc son centre de gravité et la droite (CP) est donc la troisième médiane et elle coupe donc [AD] en son milieu.

Exercice 7 : BONUS



ABCD est un carré. Les points E, F et G sont respectivement les milieux des segments [AB], [BC] et [BF]. Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires (On pourra commencer par montrer que DEG est un triangle rectangle).

Appelons a la longueur du côté du carré.

Le triangle DCG est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore :

$DG^2 = DC^2 + CG^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{25a^2}{16}$

Le triangle DAE est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$DE^2 = AE^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

Le triangle EBG est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :

$EG^2 = EB^2 + BG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{16}$

On constate que $DG^2 = DE^2 + EG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore **le triangle DEG est rectangle en E.**

Dans le triangle ABF, G milieu de [BF] et E milieu de [AB] donc d'après le théorème des milieux appliqué à ABF : (EG) ∥ (AF) or puisque le triangle DEG est rectangle en E (EG) ⊥ (DE) $donc$ $(\boldsymbol{AF}) \perp (\boldsymbol{DE})$