Chap 8

PROBABILITES

I Modélisation d'une expérience aléatoire

Si j'effectue une expérience : tirer un dé, lancer une pièce... quelles chances ai-je d'obtenir tel ou tel résultat ? Le calcul de probabilités permet de répondre à ce type de questions.

a. Vocabulaire

Définitions :

Chacun des résultats possibles d'une expérience est une issue de l'expérience
Une expérience est dite aléatoire si elle a plusieurs issues possibles et qu'on ne peut pas prévoir son résultat
Un événement est constitué par une ou plusieurs issues possibles d'une expérience aléatoire

Exemples : Exemple d'expérience aléatoire : « Lancer un dé non truqué puis lire le nombre de points sur la face supérieure"
Elle a six issues : 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

b. Loi de de probabilité :

Définition :

Définir une loi (un modèle) de probabilité pour une expérience aléatoire consiste :
- à préciser l'ensemble des issues possibles $\Omega = \{x_1, x_2, .., x_n\}$
- à attribuer à chaque issue x_i, un nombre pi, positif ou nul, appelé probabilité de x_i, de sorte que l'on ait $p_1+p_2+…+p_n=1$

c. Choix d'un modèle des deux modèles (2 façons de déterminer les probabilités p_i associées aux issues x_i)

Par le choix de l'équiprobabilité

Dans une situation d'équiprobabilité, les n issues de l'expérience aléatoire ont la même probabilité de se produire. La probabilité d'une issue est 1/n.
Le choix de ce modèle sera justifié dans les cas faisant intervenir un « tirage au hasard », des « dés équilibrés », des « boules indiscernables au toucher »…

Exemple : On lance un dé 'non truqué'. On obtient une loi de probabilité équirépartie :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Par l'observation statistique des fréquences :

Propriété : Lorsque l'on répète n fois de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence f d'une issue se stabilise, lorsque n devient grand, autour d'une valeur p.

On prend alors cette valeur p comme probabilité de cette issue et on obtient ainsi la loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Exemple : On lance un dé 'truqué'. On réalise une étude statistique (en lançant le dé un grand nombre de fois) puis on choisit une loi de probabilité en accord avec les fréquences observées des issues.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,125	0,125	0,125	0,125	0,2	0,3

II Probabilité d'un événement

Définition et propriété : Un événement A est constitué par une ou plusieurs issues possibles d'une expérience c'est donc un sous ensemble de l'ensemble E des issues possibles d'une expérience aléatoire. Sa probabilité p(A) est la somme des probabilités des issues favorables à A.

Exemple : obtenir un nombre pair quand on lance un dé.

Définition :
Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se produire : sa probabilité est 0
Un événement est dit **certain** s'il se produit nécessairement : sa probabilité est 1
Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent se réaliser en même temps

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A est :
$$p(A) = \frac{nb\ d'issues\ favorables\ à\ A}{nb\ d'issues\ possibles}$$

III Opérations sur les événements

Définitions : Soient A et B deux événements,
$\overline{A}$ est l'événement contraire de A, c'est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.
$A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A ET B (les deux à la fois)
$A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A OU B (au moins l'un des deux))

Exemple Au lancer d'un dé non truqué

A : obtenir un résultat supérieur à 4	$A = \{5;6\}$
$\overline{A}$: ne pas obtenir un résultat supérieur à 4	$\overline{A} = \{1;2;3;4\}$
B : obtenir un résultat pair	$A = \{2;4;6\}$
$A \cap B$: obtenir un résultat supérieur à 4 et pair	$A \cap B = \{4\}$
$A \cup B$: obtenir un résultat supérieur à 4 ou pair	$A \cup B = \{2;4;5;6\}$

Propriété : Soient A et B deux événements :
1) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3) p($\overline{A}$) = 1 - p(A)

Dans l'exemple précédent :
P(A)=2/6 P(B)=3/6 $P(A \cup B)$=4/6 et $P(A \cap B)$=1/6

Remarque: Si 2 événements **A et B sont incompatibles** alors $A \cap B = \emptyset\ donc\ \boldsymbol{p(A \cap B) = 0}$. D'après la propriété : $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ donc en utilisant $p(A \cap B) = 0$, on retrouve $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ dans le cas d'événements incompatibles.

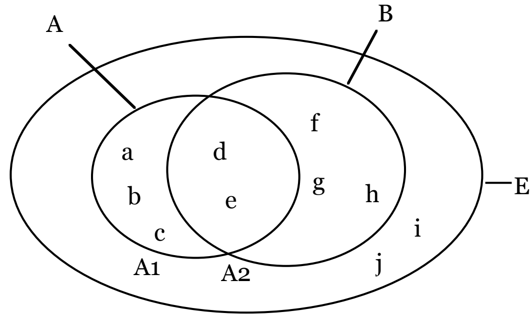
Démonstration 1

$p(A\cup B)=\dfrac{nb\,d'issues\ favorables\ à\ (A\cup B)}{nb\ total\ d'issues}$ or A et B n'ont aucune issue en commun

$$p(A\cup B)=\frac{nb\,d'issues\ favorables\ à\ A+nb\,d'issues\ favorables\ à\ B}{nb\ total\ d'issues}$$

$$p(A\cup B)=\frac{nb\,d'issues\ favorables\ à\ A}{nb\ total\ d'issues}+\frac{nb\,d'issues\ favorables\ à\ B}{nb\ total\ d'issues}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$



Démonstration 2 : On pose l'événement A_1 qui contient les issues de A qui n'appartiennent pas à B ; dans l'exemple ci-dessus $A_1=\{a;b;c\}$ et A_2 qui contient les issues qui appartiennent à A et à B
A_1 et B sont incompatibles car ils n'ont aucune issue en commun.
Donc $p(A_1\cup B)=p(A_1)+p(B)$ or $A_1\cup B=A\cup B$ donc $p(A\cup B\ )=p(A_1)+p(B)$
A_1 et $A_2=A\cap B$ sont incompatibles car ils n'ont aucune issue en commun.
Donc $p(A_1\cup(A\cap B))=p(A_1)+p(A\cap B)$ or $A_1\cup(A\cap B)=A$ donc $p(A\ )=p(A_1)+p(A\cap B)$ Or $p(A\cup B\ )=p(A_1)+p(B)$ nous donne $p(A_1)=p(A\cup B\ )-p(B)$ et en remplaçant dans l'égalité précédente $p(A_1)$ par sa valeur, on obtient :
$p(A\ )=p(A\cup B\ )-p(B)\ +p(A\cap B)$
Donc $\boldsymbol{p(A\cap B)+p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$

Démonstration 3: $A\cap\bar{A}=\emptyset\ donc\ p(A\cup\bar{A})=p(A)+p(\bar{A})$
$A\cup\bar{A}=E\ donc\ p(A\cup\bar{A})=p(E)=1\ donc\ en\ utilisant\ les\ 2\ égalités\ \ p(A\cup\bar{A})=p(A)+p(\bar{A})=1$

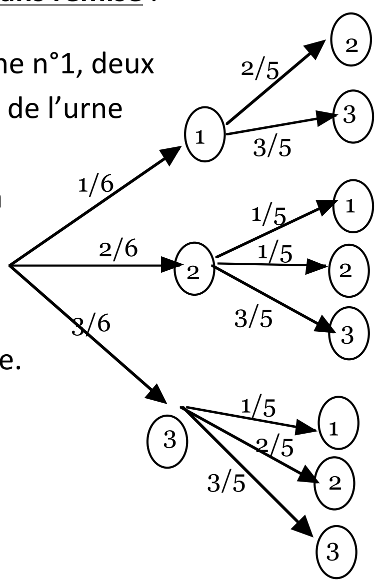
IV Choix de la représentation

a. Avec un arbre

L'arbre est utile pour modéliser le résultat d'une **succession de 2 ou plus de 2 expériences aléatoires**, comme des tirages **avec ou sans remise** .

Exemple : Une urne contient 5 boules numérotées une n°1, deux n° 2, trois n°3. On tire au hasard une première boule de l'urne puis, sans la remettre, on tire une seconde boule. On note leurs numéros. Utiliser un arbre pour préciser la loi de probabilité de l'expérience aléatoire.

Remarque : On peut lire la probabilité de chaque issue en suivant le **chemin utilisé** pour arriver à l'issue. On **multipliera les probabilités rencontrées sur les branches suivies** pour arriver à l'issue considérée.



Issues	probabilités
1 2	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{30}$
1 3	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$
2 1	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$
2 2	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$
2 3	$\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{30}$
3 1	$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{30}$
3 2	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$
3 3	$\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{30}$

Si les choix ne sont pas équiprobables, l'arbre est très utile pour déterminer la probabilité associée à chaque chemin.

b. Avec un tableau à double entrée.

Chaque ligne (ou colonne) représente les résultats possibles de la 1ère expérience aléatoire (de la 2ème). Dans la case, on met le calcul correspondant aux événements calculé à partir des 2 valeurs des 2 tirages : la somme, le produit, la comparaison… ou tout simplement les couples obtenus.

dé1\dé2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

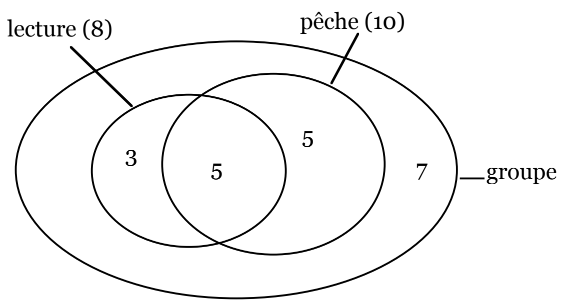
Exemple : 5 p 248
Les 36 résultats du tableau ci dessous (résultat dé 1 ; résultat dé 2) sont **équiprobables** car pour chaque dé 1,2,3,4,5,6 sont équiprobables.
A chaque issue (résultat dé1 ; résultat dé2) on peut associer la valeur Max (résultat dé1 ; résultat dé2)

Pour présenter la loi de probabilité, Il suffit donc de compter le nombre de cases où l'on trouve la valeur 1, puis 2, 3, 4, 5, 6 donc on obtient :

Max	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
proba	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

c. Représentation ensembliste

Lorsque les nombres d'éléments des ensembles sont grands, il est intéressant d'utiliser la représentation ensembliste : Cela consiste à dessiner des ensembles en notant précisément leurs position relatives (inclusion, intersection vide ou non) et le nombre d'éléments (ou les éléments) qu'ils contiennent.



Exemple : 23 p 250
On appelle P l'événement «la personne s'intéresse à la pêche » et L « la personne s'intéresse à la lecture ».

P(P)= $\frac{10}{20}$ P(L)= $\frac{8}{20}$

b) P($P \cap L$)= $\frac{5}{20}$ a) P($P \cup L$)= P(P) + P(L) - P($P \cap L$)= $\frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

Ces résultats sont facilement vérifiés avec le schéma.