FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

I La fonction carré

a) Définition :

La fonction carré est définie sur R par f : x->x^2 soit f(x) = x^2

Exemple L'image de -1 et de 1 par f est 1. L'image de $\sqrt{3}$ et de $-\sqrt{3}$ est 3.
16 a deux antécédents par f qui sont 4 et -4. -7 n'admet aucun antécédent par f.

b) Sens de variations

Propriété : La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Dem : Soient a et b deux nombres réel tels que a < b donc a - b <0
Pour déterminer si la fonction est croissante ou décroissante, on cherche si f(a)< f(b) ou f(a)> f(b). Pour cela on calcule f(a) – f(b) *f(a) – f(b) = $a^2 - b^2$ = (a - b)(a + b)*

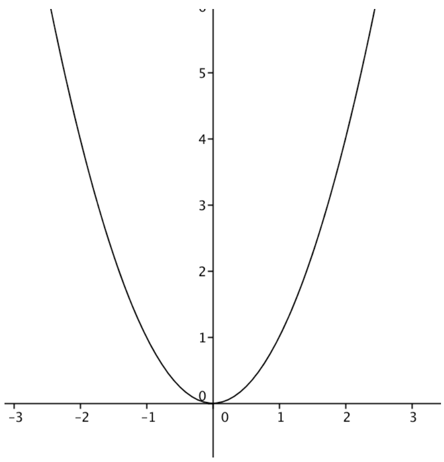
1^er cas : a et b sont négatifs
a+b <0 et a-b < 0 donc (a - b)(a + b) > 0
f(a) – f(b) > 0 et f(a)> f(b)
La fonction est décroissante

2^ème cas a et b sont positifs
a+b >0 et a-b < 0 donc (a - b)(a + b) < 0
f(a) – f(b) < 0 et f(a) < f(b)
La fonction est croissante

c) Représentation graphique

La fonction carré est représenté par une courbe appelée **parabole**. Elle est constituée de tous les points M(x ;x^2) et a pour équation y = x^2. Le point O est appelé **sommet**.

Cette courbe admet un axe de symétrie, l'axe des ordonnées.



d) Équation $x^2 = k$, k réel quelconque

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$, où k est un nombre réel revient à chercher les abscisses des points de la courbe représentative de f ayant une ordonnée égale à k.
Dans le cas de la fn carré, si $k > 0$, les points de la courbe d'ordonnée k ont pour abscisses $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$.

Propriété : Soit k un nombre réel. L'équation $x^2 = k$ admet :

- Deux solutions réelles $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$ si $k > 0$.
- Une unique solution si $k = 0$.
- Aucune solution réelle si $k < 0$.

II La fonction inverse

a) Définition :

La fonction inverse est définie sur R* par f : $x \mapsto \frac{1}{x}$ soit $f(x) = \frac{1}{x}$

Exemple L'image de 4 par f est $\frac{1}{4}$ et l'image de $-\frac{1}{2}$ par f est -2.

Remarque : L'ensemble des réels non nuls se note $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On lit $\mathbb{R}$ privé de 0.

b) Sens de variations

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Dém : Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$

1^er^ cas : x_1 et x_2 sont positifs — *2^ème^ cas : x_1 et x_2 sont négatifs*

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1}.$$

Or x_1 et x_2 sont positifs donc $x_2x_1 > 0$ — *Or x_1 et x_2 sont négatifs donc $x_2x_1 > 0$*

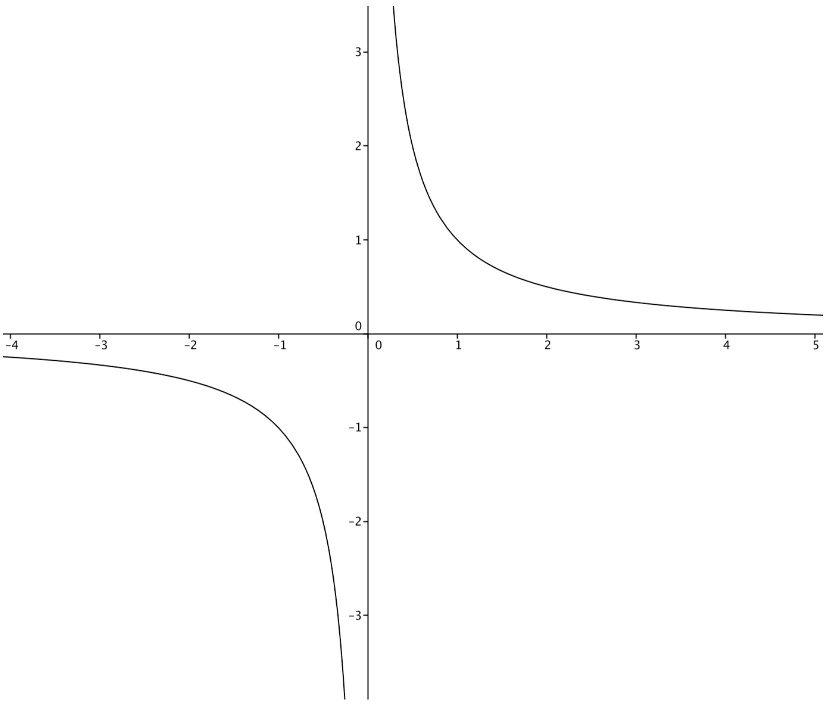
De plus et $x_1 - x_2 < 0$

Donc $f(x_2) - f(x_1) < 0$ et $f(x_1) > f(x_2)$.

Donc f décroissante sur $]0;+\infty[$. — *Donc f décroissante sur $]-\infty;0[$.*

c) Représentation graphique

La fonction inverse est représenté par une courbe appelée **hyperbole**. Elle est constituée de tous les points M(x ;1/x) et a pour équation y = 1/x. Elle admet un centre de symétrie, l'origine du repère.



En effet les points $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $N\left(-x;\frac{1}{-x}\right)$, qui appartiennent à la courbe, sont symétriques par rapport à l'origine O du repère car $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.