Chap 4

EQUATIONS DE DROITES

I Équation de droite, fonction affine

<u>Propriété :</u> Soit (O,I,J) un repère du plan. L'ensemble des points M(x,y) est une droite si et seulement si les coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$ ou l'équation $x = k$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

<u>Dem</u> : Soit A et B deux points distincts du plan. On cherche à caractériser les coordonnées des points qui sont alignés avec A et B.

Le point M(x,y) appartient à la droite (AB) si et seulement $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ on a : $\overrightarrow{AM}$ $(x - x_A ; y - y_A)$ et $\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$

<u>1^er^ cas :</u> $x_B - x_A = 0$ donc $x_B = x_A$ alors $(x - x_A)(y_B - y_A) = 0$. Comme A et B sont distincts, $y_B \neq y_A$

donc $y_B - y_A \neq 0$ et $x - x_A = 0$ donc $\boxed{x = x_A}$.

<u>2^ème^ cas :</u> $x_B - x_A \neq 0$ donc $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ donc $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + y_A$

donc $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A + \frac{x_B - x_A}{x_B - x_A}y_A$

donc $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{-(y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A}{x_B - x_A}$

donc $\boxed{y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - y_B x_A}{x_B - x_A}}$

- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ **s'appelle le coefficient directeur** de cette droite, on le note m ou a.

  Il représente l'inclinaison de la droite (pente).

- $\frac{x_B y_A - y_B x_A}{x_B - x_A}$ s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de cette droite ; on le note b ou p : La droite passe par le point de coordonnées (0 ;b).

II Droites parallèles / Droites sécantes

Propriété : Deux droites, dont les équations sont du type $y = mx + p$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Remarques : - Deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

- *Conséquence* de la propriété: deux droites sont sécantes si et seulement elles n'ont pas le même coefficient directeur : $m \neq m'$ ou si l'une a une équation du type y = mx + p et l 'autre x = k.

- *deux droites dont les équations sont du type x = k sont parallèles.*

Exemples : Les droites d et d' qui ont pour équations $y = \frac{1}{2}x + 2$ et $y = \frac{1}{2}x - 1$ sont parallèles.

Les droites d'équations y = 2x +3 et x = 1 sont sécantes.

Les droites d'équation x = 2 et x = -1 sont parallèles.

III Alignement de trois points

Propriété Soit A, B et C trois point tels que $x_A \neq x_B$ et $x_A \neq x_C$. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Exemple : On donne A(5 ;5) , B(9 ;3) et C(-13 ;14). Les points A, B et C sont-ils alignés ?

On constate que $x_A \neq x_B$ et $x_A \neq x_C$ donc on calcule les coeff directeurs de (AB) et (AC).

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{9-5} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ et $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{14-5}{-13-5} = \frac{9}{-18} = \frac{-1}{2}$: Ils st égaux donc A, B et C st alignés.