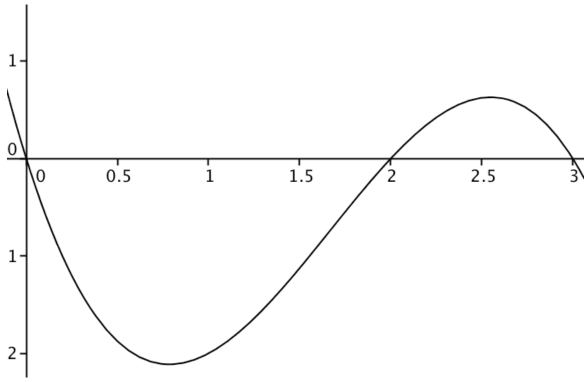
Chap 2

# VARIATIONS DE FONCTIONS

## I Introduction



A partir de la représentation graphique d'une fonction, on peut obtenir certaines informations sur cette fonction :

-Si la courbe monte (de gauche à droite) la fonction est croissante

-Si la courbe descend (de gauche à droite) la fonction est décroissante

-L'ordonnée du point le plus bas atteint par la courbe sur un intervalle donné s'appelle le minimum de la fonction sur cet intervalle.

-L'ordonnée du point le plus haut atteint par la courbe sur un intervalle donné s'appelle le maximum de la fonction sur cet intervalle.

## II Sens de variation

Définition :

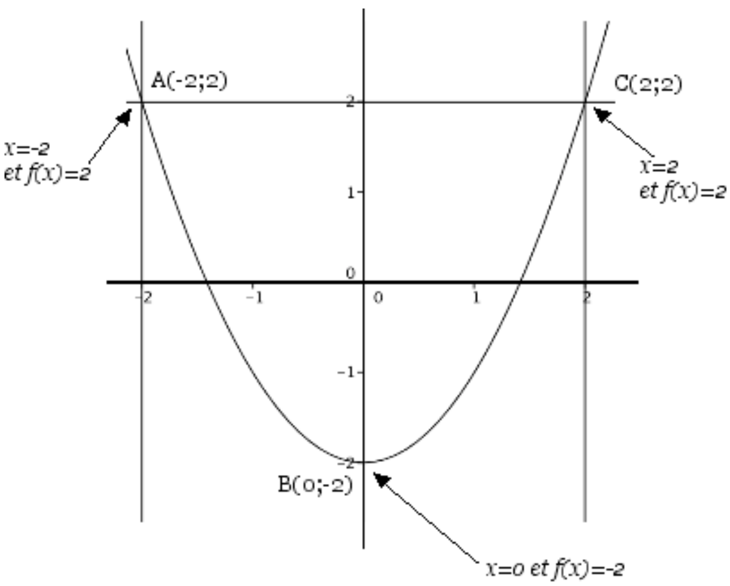
Soit I un intervalle de IR et $f$ une fonction définie sur I.

▸ Dire qu'une fonction $f$ est **croissante** sur I signifie que, pour tout nombre $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

▸ Dire qu'une fonction $f$ est **décroissante** sur I signifie que, pour tout nombre $x_1$ et $x_2$ de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Remarques : Si une fonction est croissante, les images de deux nombres de cet intervalle sont rangées dans le même ordre que ces deux nombre.

Une fonction est strictement croissante (respectivement décroissante) si le signe $\leq$ (respectivement $\geq$) est remplacé par <.




Par exemple :

la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-2$ est

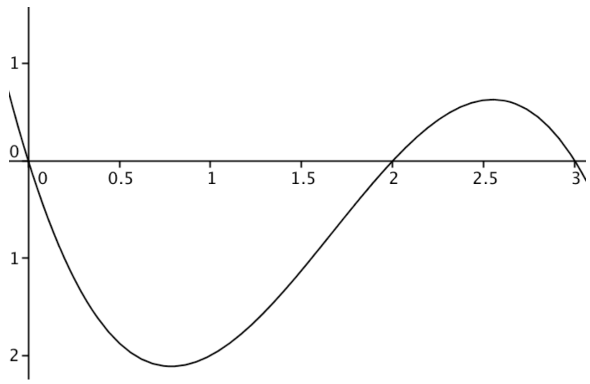
- décroissante sur [-2 ;0]
- croissante sur [0 ;2]

Définition :

Étudier le **sens de variation** d'une fonction $f$, c'est chercher, lorsqu'ils existent, les plus grands intervalles sur lesquels $f$ est croissante, décroissante ou constante.
On résume ces propriétés dans un **tableau de variation**.

Par exemple :

Voici la courbe représentative de la fonction $f : [0 ;3] \to \mathrm{IR}$, $x \mapsto 3x(x-3)(2-x)$ et son tableau de variations




| $x$ | 0 | 0,8 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 ↘ | -6,3 ↗ | 1,9 ↘ | 0 |

## III Extremum

Définition :

Soit I un intervalle de IR et $f$ une fonction définie sur I et a un nombre de I.

- On dit que $f(a)$ est le **minimum** de $f$ sur I, si pour tout $x$ de I $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est le **maximum** de $f$ sur I, si pour tout $x$ de I $f(x) \leq f(a)$.

Exemple : Pour la fonction $f$ de l'exemple précédent :
$f(0,8)$ est le minimum de $f$ sur [0 ;3]. Sur la courbe, le minimum correspond à l'ordonnée du point le plus bas sur l'intervalle choisi : le point (0,8 ;-6,3).
$f(2,5)$ est le maximum de $f$ sur [0 ;3]. Sur la courbe, le maximum correspond à l'ordonnée du point le plus haut sur l'intervalle choisi : le point (2,5 ;1,9).

## IV Sens de variation d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur IR par $f(x) = ax + b$ et d, la droite représentant cette fonction dans un repère du plan (a,b réels).

$b$ s'appelle **l'ordonnée à l'origine** du repère et $a$ s'appelle le **coefficient directeur** de d.
On peut calculer $a$ à partir des coordonnées de deux nombres et leurs images : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur IR par $f(x) = ax + b$

- Si a>0 *$f$ est strictement croissante sur IR*
- Si a<0 *$f$ est strictement décroissante sur IR*

dem :

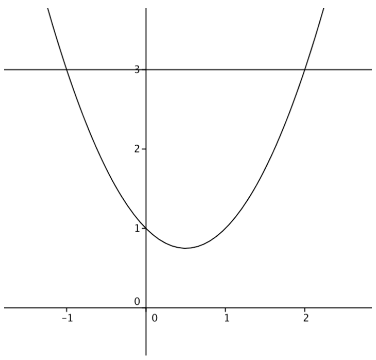
Si $a>0$, pour tout nombres $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1<x_2$ alors $ax_1<ax_2$ et $ax_1+b < ax_2+b$ donc $f(x_1)<f(x_2)$ et f est une fonction croissante

Si $a<0$, pour tout nombres $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1<x_2$ alors $ax_1 > ax_2$ et $ax_1+b > ax_2+b$ donc $f(x_1)>f(x_2)$ et f est une fonction décroissante

## III Résolution graphique d'inéquations

a) Inéquations $f(x)>k$ et $f(x)<k$ ($k \in R$)

Les solutions de l'inéquation ; $f(x)>k$ (respectivement $<k$) sont les abscisses des points de la courbe $C_f$ qui se trouvent au dessus (respectivement en dessous) de la droite d'équation $y = k$.

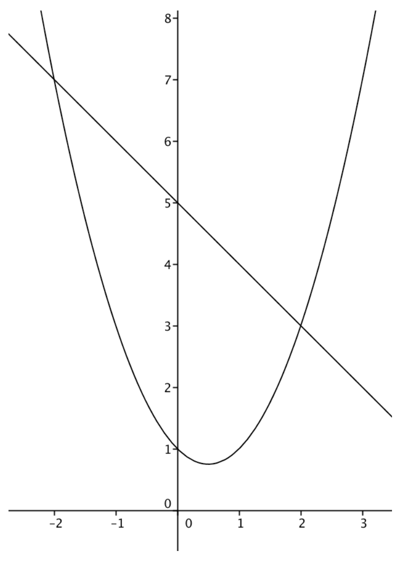



*Exemple* : Soit *f* la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 - x + 1$

Les solutions de l'équation $x^2 - x + 1 < 3$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de *f* qui se trouvent en dessous de la droite d'équation $y = 3$ : Cette inéquation semble avoir pour solution tous les point dont l'abscisse est strictement comprise entre -1 et 2 donc c'est l'intervalle ]-1 ;2[

b) Inéquations $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$

Les solutions de l'inéquation ; $f(x)>g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$ ) sont les abscisses des points de la courbe $C_f$ qui se trouvent en dessous (respectivement au dessus) de la courbe $C_f$




*Exemple* : Les solutions de l'inéquation $x^2 - x + 1 \geq 5 - x$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de *f* qui se trouvent au dessus des points de la courbe représentative de *g* Cette inéquation semble avoir pour solution l'intervalle [-2 ;2]

Avec : la fonction *f* est définie par $f(x) = x^2 - x + 1$

la fonction *g* est définie par $g(x) = 5 - x$

## IV Tableau de signe d'une fonction affine

**Propriété : Règle du signe de ax + b :**

1er cas : a>0

| x | $-\infty$ | | -b/a | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ax + b | | - | 0 | + | |

2ème cas : a<0

| x | $-\infty$ | | -b/a | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ax + b | | + | 0 | - | |