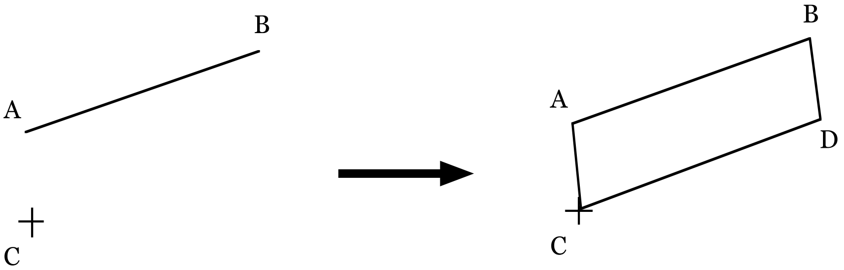
VECTEURS

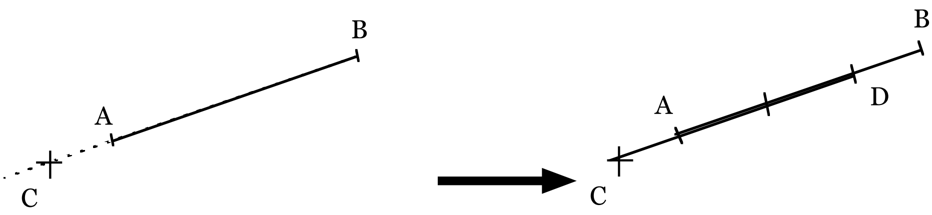
I Translation et vecteur

Définition : Soient A et B, deux points du plan. A tout point C on associe l'unique point D tel que [AD] et [BC] aient le même milieu. On dit que D est l'image de C par **la translation** qui à A associe B.

1er cas : C n'est pas aligné avec A et B. D est l'unique point tel que ABDC soit un parallélogramme.

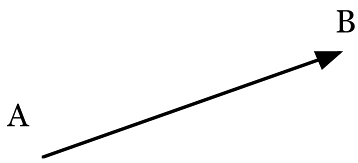


2ème cas : C est aligné avec A et B, on dira que ABDC est un parallélogramme « aplati »



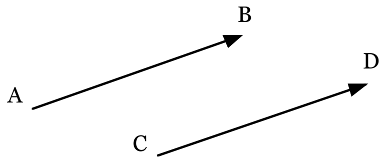
La translation qui à A associe B s'appelle aussi la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Si $A \neq B$, on représente le vecteur par une flèche d'origine A et d'extrémité B.



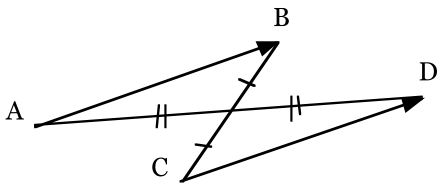
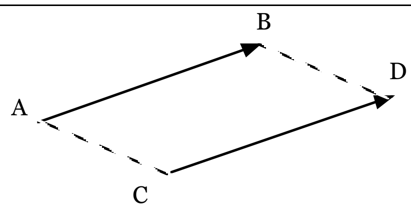
Remarque : ce vecteur représente un déplacement, il indique la direction (la droite (AB)), le sens (de A vers B) et la distance (la longueur AB).

II Égalité de deux vecteurs

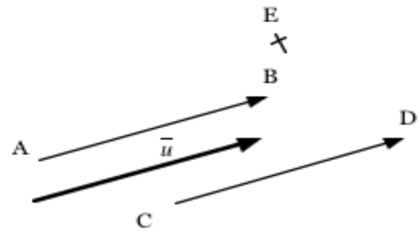


Définition : Égalité de deux vecteur

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si [AD] et [BC] ont le même milieu	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si AB**D** C est un parallélogramme éventuellement aplati
	

On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentant** d'un même vecteur que l'on peut noter $\vec{u}$ par exemple. A partir de n'importe quel point du plan, on peut tracer un vecteur qui lui est égal, par exemple $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$.



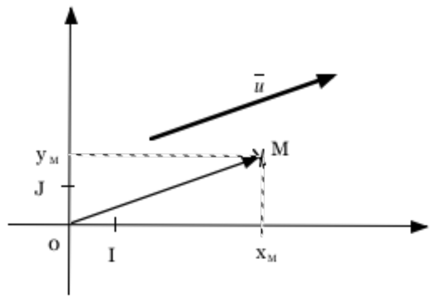
Remarques :

On appelle **vecteur nul** le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B … On le note $\vec{0}$.

On appelle **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

III Coordonnées de vecteurs

Définition : Dans un repère (O ;I,J) les **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

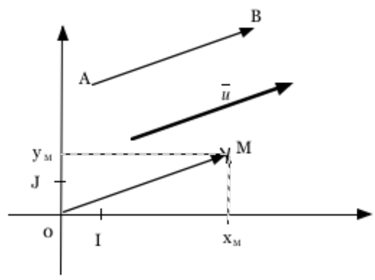


Propriété : Dans un repère, si A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}$ (x_B -x_A ; y_B -y_A).

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées (x ;y) tels que [AB] et [OM] ont le même milieu. Donc

$\frac{x_B - x_A}{2} = \frac{x}{2}$ et on a bien $x = x_B - x_A$

De même $\frac{y_B - y_A}{2} = \frac{y}{2}$ et on a bien $y = y_B - y_A$.

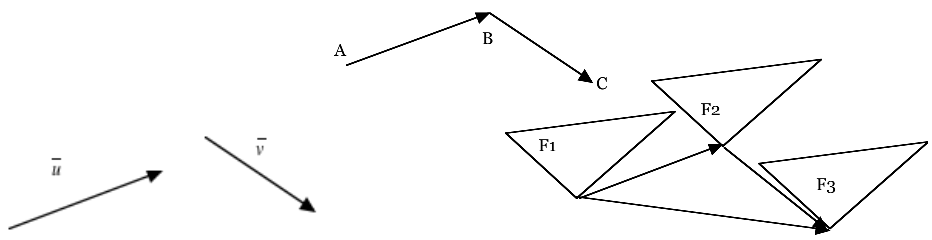


Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

Remarque : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} \end{cases}$

IV Somme de deux vecteurs

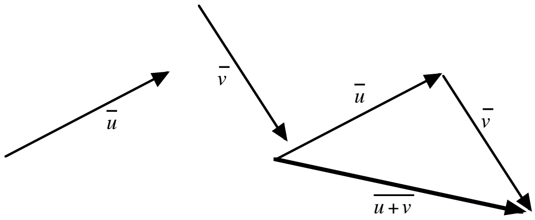
Propriété et définition : En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est associé est appelé somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Par la translation de vecteur $\vec{u}$, la figure F1 se transforme en figure F2 et par la translation de vecteur $\vec{v}$ la figure F2 se transforme en figure F3.

La figure F1 se transforme directement en F3 par une translation. Cette translation est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Représentation : Pour tracer un « vecteur somme » $\vec{u}+\vec{v}$ on trace les deux vecteurs « bout à bout ». L'extrémité du premier et l'origine du deuxième étant confondus. L'origine du vecteur somme est alors l'origine du premier vecteur et l'extrémité du vecteur somme, l'extrémité du second.

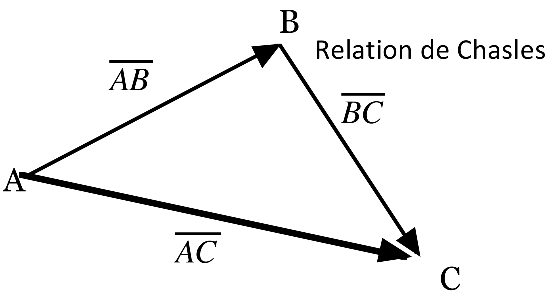


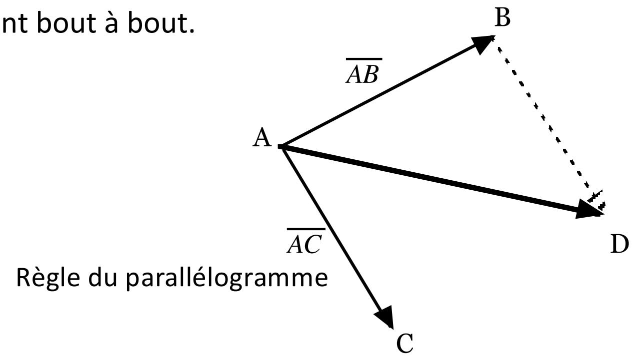
Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}$ (a ;b) et $\vec{v}$ (a' ;b') alors $\vec{u}+\vec{v}$ (a+a' ;b+b')

Propriétés :
- ◆ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$: l'addition de vecteurs est commutative.
- ◆ $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$ l'addition des vecteurs est associative.
- ◆ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ l'élément neutre de l'addition des vecteurs est le vecteur nul.
- ◆la somme de deux vecteurs opposés est égale au vecteur nul.

Relation de Chasles : Quelque soient les points A, B et C : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Les deux représentants choisis pour le vecteur somme sont bout à bout.





Règle du parallélogramme :

Quelque soient les points A, B, C et D: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

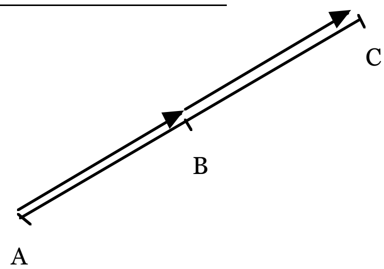
Les deux représentants choisis pour le vecteur somme ont la même origine.

Caractérisation du milieu :

B milieu de [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

B milieu de [AC] $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

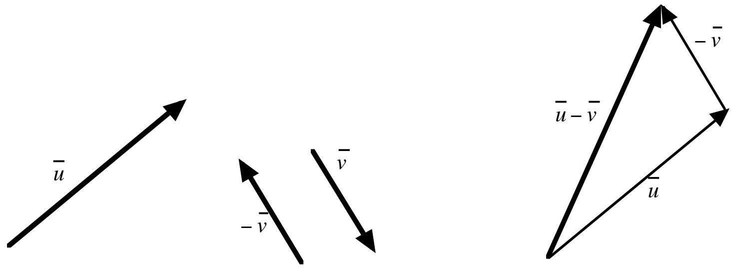
B milieu de [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$



V Opposé d'un vecteur, différence de deux vecteurs.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs : le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$ se note -$\vec{u}$.

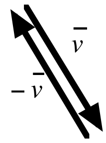
La différence de deux vecteurs s'écrit $\vec{u}-\vec{v}$ et est définie par $\vec{u}-\vec{v}$ = $\vec{u}+(-\vec{v})$.



Propriétés : ◆Soit $\vec{u}$ de coordonnées (x ;y) alors les coordonnées de -$\vec{u}$ sont (-x ;-y).

◆La somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul : $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $\vec{0}$

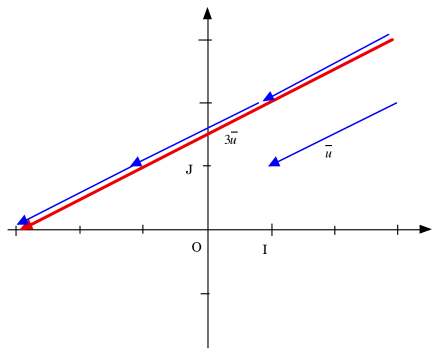
◆ $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



VI Multiplication d'un vecteur par un réel.

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x ;y) dans (O ;I ;J) et k un nombre réel.

Le vecteur k$\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (kx ;ky) dans (O ;I,J)



Propriétés :

◆ Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec k>0 alors $C \in [AB]$ et AC = k× AB

Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec k<0 alors C est un point de la droite (AB) mais $C \notin [AB]$ et AC = (-k)× AB

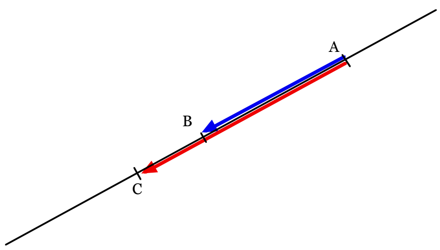
◆ $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ par exemple : $3\vec{u} = \vec{u} + 2\vec{u}$

◆ $k(k')\vec{u} = (kk')\vec{u}$ $\frac{3}{2}\vec{u} = 3(\frac{1}{2}\vec{u})$

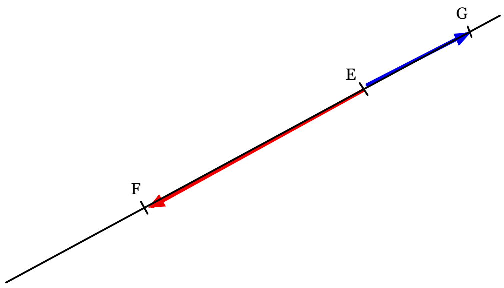
◆ $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ $3\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = 3\overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OB}$

Exemples :

$\overrightarrow{AC} = 1{,}5\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{EG}$



VII Vecteurs colinéaires.

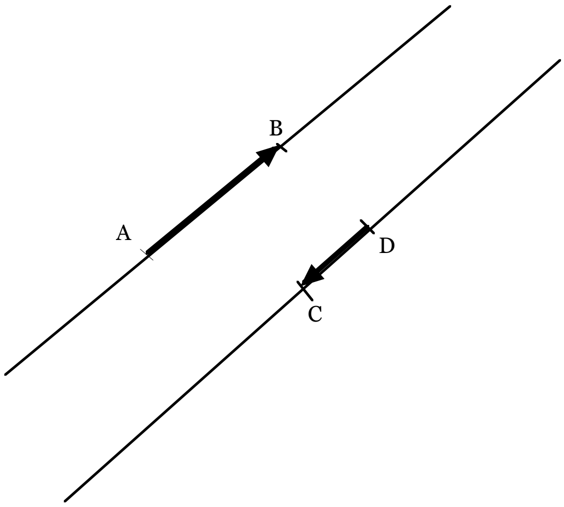
Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exemple : $\vec{u}$ (2 ;-4) et $\vec{v}$ (-3 ;6) sont colinéaires car $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$

Remarques : ◆ $\vec{u}$ (x ;y) et $\vec{v}$ (x' ;y') sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles c'est à dire si xy'=x'y.

◆Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété : Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Propriété : Trois points A, B et C du plan sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.